AVANT-PROPOS

Fondée sur la pratique du programme de mathématiques actuellement en vigueur en Terminale D en Côte d'Ivoire, la collection Séances de Prépa Maths (SPM) propose un ouvrage clair et concis. Elle est l'œuvre des conseils d'enseignement de mathématiques(C.E) et de l'association des professeurs de mathématiques de la région du Gbêkê (APMGB).

Dans l'élaboration de ce manuel, notre souci a été de respecter strictement le programme défini par les instructions officielles et précisé dans le document Enseignement mathématique.

Les chapitres de ce manuel ont la même structure :

♦ des prérequis

Les exercices proposés visent à consolider les acquis des classes antérieures.

♦ le cours

Il est bref mais complet. Nous avons respecté strictement les limites du programme, évité tout débordement qui impacte négativement les progressions.

♦ des exercices d'applications

Ces exercices corrigés visent à l'acquisition des définitions et propriétés. Nous avons beaucoup mis l'accent sur la rédaction afin d'aider nos élèves à rédiger avec clarté et précision.

♦des exercices et des problèmes

Nombreux et variés, ces exercices et problèmes permettent aux élèves de s'entrainer efficacement et aborder ainsi les devoirs dans les meilleures dispositions.

A la fin de cet ouvrage, on trouvera :

— les corrections des exercices dont les numéros sont encadrés par le triple trait.

— des sujets des BAC 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013 , 2014 , 2015 , 2016

—les corrigés des sujets des BAC2011, 2012 , 2013 et 2016

Nous espérons, par ce manuel, améliorer l'enseignement des Mathématiques en Côte d'Ivoire et lutter efficacement contre l'échec scolaire.

Pour la rédaction de ce manuel, nous remercions tous les C.E et U.P de la vallée du Bandama ainsi que les professeurs dont les noms suivent qui par leur contribution ont rendu possible la réalisation de cet ouvrage.

- SIAKA TRAORE Professeur au Lycée Classique 1 de Bouaké
- KONAN KOUAME GREGOIRE Professeur au Lycée municipal Djibo de Bouaké
- KONAN STANISLAS YAO Professeur au lycée Classique 1 de Bouaké
- SOROH HOUAMEBA Professeur au Lycée moderne 2 de Bouaké
- YEO NGOLO Professeur au Lycée moderne Belleville de Bouaké
- KONE DAHIRI Professeur au Lycée moderne Nimbo de Bouaké
- BAKAYOKO LASSINE Professeur au Lycée Classique 1 de Bouaké
- SORO DONIKPOHO Professeur au Lycée Classique 1 de Bouaké
- ANSELME ADOHOUKE Professeur au collège catholique Saint Viateur de Bouaké
- KARAMOKO MAMADOU Professeur au Lycée municipal Djibo de Bouaké
- YAO KOFFI BLAISE Professeur au Lycée municipal Djibo de Bouaké
- LAMIDI SALIMANOU Professeur au Lycée moderne Belleville de Bouaké
- DOUMBIA LOSSENI Professeur au Lycée classique1 de Bouaké
- KOUAKOU RODOLPHE Professeur au Lycée Martin Luther King de Bouaké
- KOFFI KOUAME GERMAIN Professeur au Lycée moderne Nimbo de Bouaké
- KONE MOUSSA Professeur au Lycée classique1 de Bouaké
-SEKONGO ZIE Professeur au collège la performance de Bouaké.

Les Auteurs

SOMMAIRE

1	**Limites et continuité**	3
2	**Dérivées et primitives**	20
3	**Fonction logarithme népérien-Etude de fonctions faisant intervenir ln**	44
4	**Fonction exponentielle népérienne - Etude de fonctions faisant intervenir** exp	71
5	**Fonctions exponentielles et fonctions puissances**	**91**
6	**Calcul intégral**	100
7	**Suites numériques**	119
8	**Equations différentielles**	141
9	**Nombres complexes**	150
10	**Nombres complexes et transformations**	184
11	**Probabilités**	199
12	**Statistiques**	232
13	**Rubrique problème**	246
14	**Corrigés des exercices**	265
15	**Sujets de BAC (SESSION 2008 à 2016)**	322

1

LIMITES ET CONTINUITÉ

COURS 5

TRAVAUX PRATIQUES 15

EXERCICES 18

COMMENTAIRES

● **Ce chapitre vise à** :

► Compléter l'étude de la limite d'une fonction engagée en classe de première par l'introduction de la limite d'une fonction composée ;

►Introduire la continuité d'une fonction sur un intervalle et utiliser quelques théorèmes usuels liés à la continuité de cette fonction.

● **La plupart** des propriétés ont été abordées en classe de première. Ces propriétés, tout comme les techniques de calculs pour lever une indétermination, ne doivent pas faire l'objet d'un traitement théorique. Elles seront mises assez rapidement en œuvre dans des exercices dont le niveau de technicité et l'abondance doivent rester très raisonnable car elles seront réinvesties tout au long de l'année dans les études de fonctions.

● **Les asymptotes** à une courbe (horizontale, verticale et oblique) ont été abordées en première. L'étude générale des branches infinies est hors programme. Les branches paraboliques selon les axes de coordonnées sont les seules directions asymptotiques à connaître. Dans le cas d'une asymptote oblique une équation est fournie à l'élève.

● **On introduira** la continuité d'une fonction sur un intervalle. Cette définition permet l'usage de deux théorèmes importants concernant l'existence d'une bijection réciproque et la propriété des ‘’valeurs

intermédiaires''.

● **Notons que** la forme générale de cette dernière propriété est hors programme. On se limitera au cas d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle.

● **Les propriétés** concernant les opérations sur les fonctions continues sur un intervalle sont admises. On n'exigera pas de l'élève la justification de la continuité sur un intervalle lors d'une évaluation.
On fera admettre les propriétés sur les opérations et la composée de fonction continues.

● **Dans la** détermination des limites, on veillera à ce que l'élève sache identifier une forme indéterminée sans forcément en faire état par écrit.
Pour déterminer la limite d'une fonction composée on peut utiliser un changement de variable.

● **On n'abusera** pas des fonctions définies par raccordement.

● **Pour déterminer** l'image d'un intervalle par une fonction continue, on privilégiera l'utilisation du tableau de variation.
La détermination de l'image d'un intervalle par une fonction continue avec une méthode algébrique ne sera proposée qu'à travers des exercices guidés.

● **On peut** avec profit vérifier le prérequis de la classe de première et les théorèmes concernant la continuité à travers des études de fonctions.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES
1. limites limites d'une fonction composée 2. Continué sur un intervalle : -Opération, composée (propriété admises) - Image d'un intervalle 3. Branche parabolique de direction (OI) ou (OJ) dans un repère (O, I, J) 4. Fonction continue et strictement monotone sur un intervalle : Théorème : *Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.* *Sa bijection réciproque f^{-1} est une fonction continue sur $f(I)$ et de même sens de variation que la fonction f.* Théorème 2 : *si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors pour tout m de $f(I)$,* *l'équation : $f(x) = m$,admet une unique solution dans I.* Corollaire : *Soit f une fonction continue et strictement monotone sur [a,b].* *Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe contraires alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle ouvert] a, b [.* 5. Prolongement par continuité 6.fonction du type : $x \to \sqrt[n]{x}$, $(n \in \mathbb{N}^*)$; $x \to x^r$ $(r \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{R}+^*)$ Définition ; Notation $x^{p/q}$; Propriété des puissances d'exposants rationnels.	☞ Déterminer la limite d'une fonction : - en utilisant les limites de référence ou une expression conjuguée ; - en ayant recours à la définition d'un nombre dérivé. ☞ Déterminer la limite d'une fonction composée. ☞ Déterminer l'image d'un intervalle part une fonction continue : - en utilisant le tableau de variation ; - en utilisant une méthode algébrique. ☞ Interpréter graphiquement : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ ($-\infty$) ; $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ $(-\infty)$. ☞ Démontrer qu'une courbe admet une branche parabolique de direction (OI) (resp. (OJ)). ☞ Démontrer qu'une fonction réalise une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J dans le cas où f es continue et strictement monotone sur I. En outre dans des cas simples où f est donnée par une formule explicite, déterminer $f^{-1}(x)$. ☞ Prouver l'existence d'une unique solution de l'équation f(x) = m sur un intervalle I . ☞ Prolongement par continuité d'une fonction en un point.

COURS

I. LIMITE D'UNE FONCTION COMPOSÉE

Théorème

Soit $g \circ f$ la composée de la fonction f par la fonction g .
a désigne soit un nombre réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.
On suppose que $g \circ f$ est définie sur un intervalle I et que a est un élément ou une borne de I.
$Si \ \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \ et \ \lim\limits_{x\to b} g(x) = \ell \quad alors \ \lim\limits_{x\to a} gof(x) = \ell$.
(b, ℓ des nombres réels ou infinis).

Exemples

1. Calculer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \sqrt{\frac{2}{x^2+1}}$.

2. Calculer la limite en 0 de la fonction f définie sur IR* par : $f(x) = \frac{\sin 2x}{x}$.

3. Calculer la limite en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction f définie sur $]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 2$.

Solution

1. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{x^2+1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{x^2}\right) = 0 \\ \lim\limits_{X\to 0} \sqrt{X} = 0 \end{cases}$ $par\ composée \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0.$

2. Effectuons un changement de variable, en posant : $X = 2x$ *donc* $x = \frac{X}{2}$ *;*
quand $x \longrightarrow 0$, *alors* $X \longrightarrow 0$.
Nous avons: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sin2x}{x} = \lim\limits_{X\to 0} 2\frac{sinX}{X} = 2 \times 1 = 2.$ *Donc* $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$.

3. a) Pour calculer la limite de f *en* $-\infty$, *transformons* $f(x)$ *à l'aide de l'expression conjuguée.*

$$\forall x \in]-\infty; -1], f(x) = \frac{\left[\sqrt{x^2 - x - 2} + (x-2)\right]\left[\sqrt{x^2 - x - 2} - (x-2)\right]}{\sqrt{x^2 - x - 2} - (x-2)}$$

$$f(x) = \frac{x\left(3 - \frac{6}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)} - (x-2)} = \frac{x(3 - \frac{6}{x})}{-x\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} - (x-2)}$$

$$f(x) = \frac{3 - \frac{6}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} \ -1 + \frac{2}{x}}.$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} (3) = 3$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{-6}{x}\right) = 0$ *donc par somme* $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(3 - \frac{6}{x}\right) = 3.$ *(1)*

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\frac{2}{x}\right) = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} (1) = 1$ *donc par somme* $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) = 1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)=1 \\ \lim\limits_{x\to 1}\left(-\sqrt{x}\right)=-1 \end{cases} \text{ par composée } \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)=-1$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}(-1)=3 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x}\right)=0 \end{cases} \text{ par somme } \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(-1+\frac{2}{x}\right)=-1$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)=-1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-1+\frac{2}{x}\right)=-1 \end{cases} \text{ par somme } \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-1+\frac{2}{x}\right)=-2 \qquad (2)$$

$De\ (1) et\ (2)$, on conclut par quotient: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\frac{3}{2}$.

b)

- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-x-2)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty \end{cases}$ par somme $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x-2}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x)=+\infty$

$D'où\ par\ somme$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Exercices

Calculer :

$a)\ \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x+5}$; $b)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2+2x+5}-x+4\right)$

$c)\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3x^2+2x+5}-x+4\right)$; $d)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+5}-x+2\right)$

II. LIMITE D'UNE FONCTION MONOTONE SUR UN INTERVALLE OUVERT

Théorème

a et b des nombres réels ou infinis.

- Si f est croissante et majorée sur]a, b[alors f admet une limite finie en b.
- Si f est décroissante et minorée sur]a, b[alors f admet une limite finie en b.

III. BRANCHES PARABOLIQUES DE DIRECTION (OI) ET (OJ)

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J)

Définition

Soit f une fonction numérique et (C) sa courbe représentative dans le repère (O, I, J)

- On dit que (C) admet en $+\infty$ une **branche parabolique de direction (OI)**

si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(\text{ou} -\infty)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

- On dit que (C) admet en $+\infty$**une branche parabolique de direction (OJ)**

si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(\text{ou} -\infty)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty(\text{ou} -\infty)$.

NB : La définition se reconduit si l'on remplace $x \to +\infty$ par $x \to -\infty$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur]1;+∞[par : $f(x) = \frac{2}{x-1} - \sqrt{x+1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement les résultats.

Solution

Nous avons: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{x}\right) = 0.$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty \end{cases}$ *par composée* $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$

Donc par somme: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

- $\forall x \in]1;+\infty[$, $\frac{f(x)}{x} = \frac{2}{x^2-x} - \frac{\sqrt{x+1}}{x} = \frac{2}{x^2-x} + \frac{-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{x+1}}$.

Nous avons: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{x^2-x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{x^2}\right) = 0$ (1).

Nous avons: $\lim\limits_{x\to+\infty} (-1) = 1$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$ *donc par somme* $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-1-\frac{1}{x}\right) = -1$.

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$ *donc par quotient:* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{x+1}} = 0$ *(2).*

De (1) et (2), par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, *donc (C) admet en* $+\infty$ *une branche parabolique de direction (OI).*

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = 2x^3 - x^2 + 5$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O,I,J).

Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement les résultats.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, I, J).

Démontrer que (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (OJ).

IV. PROLONGEMENT PAR CONTINUITÉ

Propriété et définition

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f et a un nombre réel n'appartenant pas à D_f.

Si f admet une limite finie ℓ en a alors la fonction g définie sur $D_f \cup \{a\}$ par : $\begin{cases} g(a) = \ell \\ \forall x \in Df, g(x) = f(x) \end{cases}$

est continue en a et est appelée **le prolongement par continuité de f en a**.

Exemple

Soit f la fonction de IR vers IR définie par : $f(x) = \frac{x-9}{\sqrt{x-5}-2}$.

Démontrer que f admet en 9 un prolongement par continuité et définir le prolongement continu φ.

Solution

D_f = { $x \in IR / x-5 \geq 0$ *et* $\sqrt{x-5}-2 \neq 0$ }

$x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$

$\sqrt{x-5}-2 = 0 \Leftrightarrow x \geq 5$ *et* $x-5 = 4 \Leftrightarrow x = 9$.

Donc : D_f = [5 ;9[U]9 ;+∞[.

$\forall x \in D_f$, $f(x) = \frac{(x-9)(\sqrt{x-5}+2)}{(\sqrt{x-5}-2)(\sqrt{x-5}+2)} = \frac{(x-9)(\sqrt{x-5}+2)}{x-9} = \sqrt{x-5}+2$.

Nous avons: $\lim\limits_{x\to 9} f(x) = \lim\limits_{x\to 9}\left(\sqrt{x-5}+2\right) = 4$

Ainsi, $9 \notin D_f$ *et* f *admet une limite finie en 9 donc* f *est prolongeable par continuité en 9.*

φ *est définie sur* $D_f \cup \{9\}$ = [5 ; +∞[*par :* $\varphi(9) = 4$ *et* $\forall x \in D_f, \varphi(x) = f(x)$.

Remarque: φ est définie sur [5 ; +∞[par: $\varphi(x) = \sqrt{x-5}+2$.

Exercice 1

Soit f: IR $\longrightarrow$ IR

$x \longmapsto \frac{x^2+x}{|x|}$

f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice 2

Soit f: IR $\longrightarrow$ IR

$x \longmapsto \frac{x^3+1}{2x^2-3x-5}$

Démontrer que f admet un prolongement par continuité g en -1.

V. CONTINUITÉ SUR UN INTERVALLE

1. Continuité sur un intervalle

Définition

On dit qu'une fonction f est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout nombre réel de I.

2. Opérations

Propriété

■ Les fonctions polynômes, rationnelles, sinus, cosinus et tangente sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.

■ Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I, alors :

- $f+g$, fg et $|f|$ sont continues sur I ;
- si g ne s'annule pas sur I alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I ;
- si f est positive sur I alors $\sqrt{f}$ est continue sur I.

■ Si f est continue sur un intervalle I et g continue sur f(I), alors gof est continue sur I.

3. Fonction continue et strictement monotone sur un intervalle

Propriété 1

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. a et b des nombres réels .

I	f est continue et strictement croissante sur I	f est continue et strictement décroissante sur I
$[a;b]$	$f(\mathrm{I}) = [f(a); f(b)]$	$f(\mathrm{I}) = [f(b); f(a)]$
$[a;b[$	$f(\mathrm{I}) = [f(a); \lim\limits_{\substack{x\to b \\ <}} f(x)[$	$f(\mathrm{I}) =]\lim\limits_{\substack{x\to b \\ <}} f(x); f(a)]$
$]a;b[$	$f(\mathrm{I}) =]\lim\limits_{\substack{x\to a \\ >}} f(x); \lim\limits_{\substack{x\to b \\ <}} f(x)[$	$f(\mathrm{I}) =]\lim\limits_{\substack{x\to b \\ <}} f(x); \lim\limits_{\substack{x\to a \\ >}} f(x)[$
$[a;+\infty[$	$f(\mathrm{I}) = [f(a); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$	$f(\mathrm{I}) =]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x); f(a)]$
$]-\infty;+\infty[$	$f(\mathrm{I}) =]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$	$f(\mathrm{I}) =]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x); \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)[$

Exemple

La fonction f est continue et strictement monotone sur]-∞;-1], sur [-1 ;0[et sur]0; +∞[et a pour tableau de variation:

x	-∞	-1		0	+∞
$f'(x)$	+	0	−	‖	−
$f(x)$	-2 ↗	5	↘ -1	‖	+∞ ↘ 1

Déterminer les images des intervalles]-∞ ;-1],]0 ;+∞[et [-1 ;0[par f.

f est continue et strictement croissante sur]-∞ ;-1] donc : f(]-∞ ;-1]) =]-2 ; 5].

f est continue et strictement décroissante sur]0 ;+∞[donc : f(]0 ;+∞[) =]1 ;+∞[.

f est continue et strictement décroissante sur [-1 ;0[donc : f([-1 ;0[) =]1 ;5].

Exercice 1

Soit f la fonction de IR vers IR définie par : $f(x) = \frac{x+1}{2x-1}$.

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Déterminer $f\left(\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]\right)$ et $f([2;5])$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par : $f(x) = x - 3 + \frac{4}{x^2}$.

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Déterminer $f(]-\infty;0[)$, $f(]-\infty;-1[)$, $f(]0;2])$ et $f([2;+\infty[)$.

Propriété 2

Si I est un intervalle et si f est continue sur I alors f(I) est un intervalle.

Propriété 3

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors :

■ f réalise une bijection de I sur f(I).

■ la bijection réciproque f^{-1} de f est continue et strictement monotone (de même sens de variation que f) sur f(I).

Exemple

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$.

1. Démontrer que f est une bijection de $[0;+\infty[$ sur un intervalle K que l'on précisera.
2. Déterminer la bijection réciproque f^{-1}. Quel est le sens de variation de f^{-1} ?

1. *Nous avons*: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1.$

f *est dérivable sur* $[0;+\infty[$ *et pour tout* $x \in [0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{2x(1+x^2)-2x(x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$.

Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) > 0$ *car* $\forall x \in]0;+\infty[, 2x > 0$ *et* $(1+x^2)^2 > 0$.

f *est donc continue et strictement croissante sur [0 ;+∞[; par suite f réalise une bijection de* $[0;+\infty[$ *sur* $f([0;+\infty[) = [0;1[$.

2. Soit $y \in [0;1[$. $x \in [0;+\infty[, f(x) = y \Leftrightarrow x^2 = y + x^2y \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{y}{1-y}}$.

f^{-1} *est donc définie sur [0 ;1[par :* $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$.

f^{-1} *a le même sens de variation que* f *, donc* f^{-1} *est strictement croissante sur [0;1[.*

Exercice 1

Soit f :] -1 ; +∞ [$\to$ $]-3;+\infty[$

$x \longmapsto \frac{2-3x}{x+1}$

Démontrer que f est une bijection et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur [1 ;2] par : $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$.

a) Démontrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} dont on précisera le sens de variation.

b) Démontrer que : $\forall x \in \left[-\frac{1}{2};0\right], f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1+2x}$.

Propriété 4

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors pour tout $m \in f(I)$, l'équation : $\boldsymbol{f(x) = m}$ admet une solution unique dans I.

Exemple

On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f continue et strictement décroissante sur [-1;+∞[:

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$		-	
$f(x)$	5	↘	$-\infty$

Justifier que l'équation : $f(x) = -10$ admet une unique solution dans [-1;+∞[.

f *est continue et strictement décroissante sur [-1;+∞[,* $f([-1;+\infty[) =]-\infty;5]$ *et* $-10 \in]-\infty;5]$ *donc l'équation :* $f(x) = -10$ *admet une solution unique dans [-1 ;+∞[.*

Corollaire

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle $[a;b]$ et si $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation : $\boldsymbol{f(x) = 0}$ admet une solution unique dans $]a;b[$.

Exemple

1. Démontrer que l'équation : $x \in]0\,;1[, 2x^3 + 3x - 1 = 0$ admet une unique solution α.
2. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

1. *Soit f la fonction définie sur [0;1] par: $f(x) = 2x^3 + 3x - 1$. f est dérivable sur [0;1].*
Pour tout $x \in [0;1]$, $f'(x) = 6x^2 + 3$. Par suite, pour tout $x \in$[0;1], $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur [0;1]. $f(0) = -1$ et $f(1) = 4$.
f est continue et strictement croissante sur [0;1] et $f(0) \times f(1) < 0$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans]0 ;1[.
2.*On a : $f(0{,}3) \times f(0{,}4) < 0$ donc 0,3 < α < 0,4. Une valeur approchée de α à 10^{-1} près est 0,3.*

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x} - 3x - 1$.

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. a) Démontrer $\forall \in]0;+\infty[, f'(x) = \frac{3}{2}\left(\sqrt{x} - 2\right)$.

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3. a) Démontrer que l'équation : $x \in IR, f(x) = 0$ admet une unique solution α.

b) Justifier que $9 < \alpha < 10$.

c) Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

4. Justifier que :

$\forall\, x \in]0;\alpha[, f(x) < 0$;

$\forall\ x \in]\alpha;+\infty[, f(x) > 0$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2}{2} + 2 + \frac{1}{x}$.

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. a) Démontrer $\forall \in IR^*, f'(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$.

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3. a) Démontrer que l'équation : $x \in IR, f(x) = 0$ admet une unique solution α.

b) Justifier que $-0{,}8 < \alpha < -0{,}7$.

4. Justifier que : $\forall\, x \in]-\infty;\alpha[\cup]0;+\infty[, f(x) > 0$ et $\forall\ x \in]\alpha;0[, f(x) < 0$.

VII. FONCTION RACINE N-IÈME, PUISSANCE D'EXPOSANT RATIONNEL

1. Fonction racine n-ième

Définition

Soit n un nombre entier naturel tel que $n \geq 2$.

- La fonction racine n-ième est la bijection réciproque de la fonction

$f: [0; +\infty[\longrightarrow [0; +\infty[$
$x \longmapsto x^n$.

- L'image d'un nombre réel positif par la fonction racine n-ième est notée $\sqrt[n]{x}$ ou $x^{\frac{1}{n}}$.

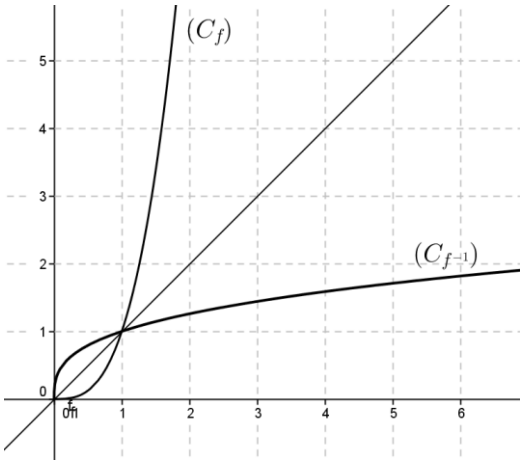
$\sqrt[n]{x}$ ou $x^{\frac{1}{n}}$ est la racine n-ième de x .

Exemple

$Soit \quad f: [0; +\infty[\longrightarrow [0; +\infty[$
$x \longmapsto x^3$

La fonction racine $3-$ ième est la fonction $f^{-1}: [0; +\infty[\longrightarrow [0; +\infty[$
$x \longmapsto \sqrt[3]{x}$

Les courbes représentatives de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation y = x :



Conséquences :

- $\begin{cases} x \in \text{IR}^+ \\ y = \sqrt[n]{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \text{IR}^+ \\ x = y^n \end{cases}$

- $\forall x \in \text{IR}^+, \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$ ou $(x^{\frac{1}{n}})^n = x$ et $\sqrt[n]{x^n} = x$.

Exemples

a) $x \in IR^+, x^3 = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{5}$; .

b) $\sqrt[4]{16} = 2$; $\sqrt[5]{120^5} = 120$.

2. Puissance d'exposant rationnel d'un nombre réel strictement positif

Définition

Soit p un nombre entier relatif non nul et q un nombre entier naturel tel que $q \geq 2$.
Pour tout nombre réel a strictement positif, on pose :
$a^{\frac{p}{q}} = (a^{\frac{1}{q}})^p = (\sqrt[q]{a})^p = \sqrt[q]{a^p}$.

Propriétés

Pour tous nombres rationnels r et r' non nuls et pour tous nombres réels strictement positifs a et b on a :

- $a^r \times a^{r'} = a^{r+r'}$
- $\frac{1}{a^r} = a^{-r}$
- $\frac{a^{r'}}{a^r} = a^{r'-r} = \frac{1}{a^{r-r'}}$
- $(a^r)^{r'} = a^{rr'}$
- $a^r \times b^r = (ab)^r$
- $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$

Exercices

1 Soit a un nombre réel strictement positif. Mettre sous la forme a^{α} où α est un nombre rationnel, les nombres réels suivants : $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}$; $\frac{a^3}{\sqrt{a^{0,4}}}$; $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[4]{a}$.

2 Justifier que : $\frac{4 \times \sqrt[10]{8}}{\sqrt{\sqrt[5]{256}}} = 2\sqrt{2}$.

3 Justifier que pour tous nombres réels a et b strictement positifs : $\sqrt[3]{\sqrt{a^5 b}} \times \sqrt{\sqrt[3]{ab^5}} = ab$.

TRAVAUX PRATIQUES

Exercice résolu 1

Soit la fonction g : [1;3] $\rightarrow$ [0;4]

$x \longmapsto -x^2 + 2x + 3$

1. Démontrer que g est une bijection.

2. Déterminer la bijection réciproque g^{-1} de g.

Solution

1. *g est dérivable sur [1;3].* $\forall\, x \in [1\,;3], g'(x) = -2x + 2$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Donc $\forall\, x \in]1;3], g'(x) < 0$.

La fonction g est continue et strictement décroissante sur [1;3] et g([1;3]) = [g(3);g(1)] = [0;4] donc g est une bijection.

2. Soit y ∈ [0 ;4]. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1\,;3]$ *nous avons les équivalences suivantes :*

$f(x) = y \Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 + y = 0$

$\Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{4-y}$ *car* $x - 1 \geq 0$ *pour* $x \in [1\,;3]$

$\Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{4-y}$.

D'où la bijection g^{-1} *est définie sur* $[0\,;4]$ *par* $g^{-1}(x) = 1 + \sqrt{4-x}$.

Exercice résolu 2

Partie A

g est la fonction définie sur IR par $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$. 1.

Calculer les limites de g en -∞ et en +∞.

2. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

3. Démontrer que l'équation : $x \in$ IR, $g(x) = 0$, admet une solution unique α et que $1{,}6 < \alpha < 1{,}7$.

4. Démontrer que : $\forall x \in]-\infty;\alpha[, g(x) < 0$ *et* $\forall x \in]\alpha;+\infty[, g(x) > 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I,J). L'unité graphique est 2 cm.

1. Calculer les limites de f en -1 et en +∞ puis interpréter graphiquement les résultats.

2.a) Démontrer que : $\forall\, x \in]-1;+\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x^3)^2}$.

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

c) Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

d) Etudier la position de (C) par rapport à (T).

3. Tracer (T) et (C).

Solution

Partie A *Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.*

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (2x^3 - 3x^2 - 1) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (2x^3 - 3x^2 - 1) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$.

2. *g est dérivable sur IR.* $\forall x \in IR, g'(x) = 6x^2 - 6x$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *ou* $x = 1$.

$\forall\, x \in]-\infty\,;\, 0[\cup]1; +\infty[, g'(x) > 0$

$\forall\, x \in]\,0; 1\,[, g'(x) < 0$

On en déduit que : g est strictement croissante sur] -∞ ; 0] et sur [1;+∞ [, g est strictement décroissante sur [0;1].

Tableau de variation de g.

x	-∞		0		1		+∞
$g'(x)$		+	0	-	0	+	
$g(x)$	-∞ ↗		-1	↘	-2	↗	+∞

3. ● *La fonction g est dérivable] -∞ ; 1] , et g' s'annule en 0.*
Par ailleurs, pour tout $x \in]-\infty; 0[$, $g'(x) > 0$ *et pour tout* $x \in]0; 1[$, $g'(x) < 0$
Par suite g(0) est le maximum de g sur] -∞ ; 1].
D'où : $\forall x \in$ *] -∞ ;1],* $g(x) \leq g(0)$ *et comme* $g(0) < 0$, *alors* $\forall x \in$ *] -∞ ;1],* $g(x) < 0$.
● *La fonction g est continue et strictement croissante sur [1 ;+∞[; g([1;+∞[) = [-2;+∞[,*
Or 0 ∈ [-2;+∞[, donc l'équation $g(x) = 0$ *admet une unique solution α dans [1;+∞[.*
Conclusion: l'équation $x \in IR, g(x) = 0$ *admet une solution unique α.*
1,6 et 1,7 appartiennent à [1;+∞[; g(1,6) ≈ -0,49 et g(1,7) ≈0,16 ;
g(1,6)× g(1,7) < 0 donc 1,6 <α< 1,7.
4. ● *Il a été démontré à la question 3) que* $\forall x \in$ *] -∞ ;1],* $g(x) < 0$.
● *La fonction g est continue et strictement croissante sur [1; α [et sur] α ;+∞[, d'où :*
$g([1;\ \alpha\ [\ ) = [-2; 0[$ *et* $g(]\ \alpha\ ; +\infty[) =]0\ ; +\infty[$ *donc :*
$\forall x \in [1;\ \alpha\ [, g(x) < 0$ *et* $\forall x \in$ *] α ;+∞[,* $g(x) > 0$.
On conclut : $\forall x \in$ *] -∞;α[,* $g(x) < 0$ *et* $\forall x \in$ *] α ;+∞[,* $g(x) > 0$.

Partie B

1. ● $Pour\ tout\ x > -1,\ f(x) = \frac{1-x}{1+x^3} = \frac{1}{1+x^3}(1-x)$

Pour $x > -1$ *, on a* $x^3 > -1$ *, soit* $x^3 + 1 > 0$ *, par suite* $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} \frac{1}{1+x^3} = +\infty$

et comme $\lim\limits_{x\to-1} (1-x) = 2$, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x) = +\infty$. *Donc la droite d'équation* $x = -1$ *est asymptote à (C).*

● $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-x}{1+x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{x^2} = 0$ *donc la droite d'équation y = 0 est*

asymptote à (Cf) en $+\infty$.

2. a) f est dérivable sur $]-1; +\infty[$.

$\forall x \in]-1; +\infty[,\ f'(x) = \frac{-(1+x^3)-3x^2(1-x)}{(1+x^3)^2} = \frac{-1-x^3-3x^2+3x^3}{(1+x^3)^2} = \frac{2x^3-3x^2-1}{(1+x^3)^2} = \frac{g(x)}{(1+x^3)^2}$

b) $\forall x \in]-1; +\infty[, (1+x^3)^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ déterminé à la fin de la partie A , par suite : $\forall x \in]-1\ ;\ \alpha[\ , f'(x) < 0$; $\forall x \in]\alpha\ ;\ +\infty[\ , f'(x) > 0$ et $f'(\alpha) = 0$.

On en déduit que f est strictement décroissante sur] -1;α] et strictement croissante sur [α ;+∞[.

Tableau de variation de f,

x	-1		α		$+\infty$
f'(x)	‖	-	*0*	+	
f(x)	‖	$+\infty$ ↘	f(α)	↗	*0*

c) Une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.

Ainsi une équation de la tangente (T) est : $y = -x + 1$.

d) Pour tout $x > -1$, $f(x) - (-x+1) = \frac{x^2-x}{1+x^3} = \frac{x^3(x-1)}{1+x^3}$.

$\forall x \in]-1; +\infty[, 1+x^3 > 0$ *donc le signe de* $f(x) - (-x+1)$ *est celui de* $x(x-1)$.

$f(x) - (-x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *ou* $x = 1$.

x	*-1*		*0*		*1*		$+\infty$
x^3	-		*0*	+		+	
$x-1$	-			−	*0*	+	
$x^3(x-1)$	‖	+	*0*	-	*0*	+	

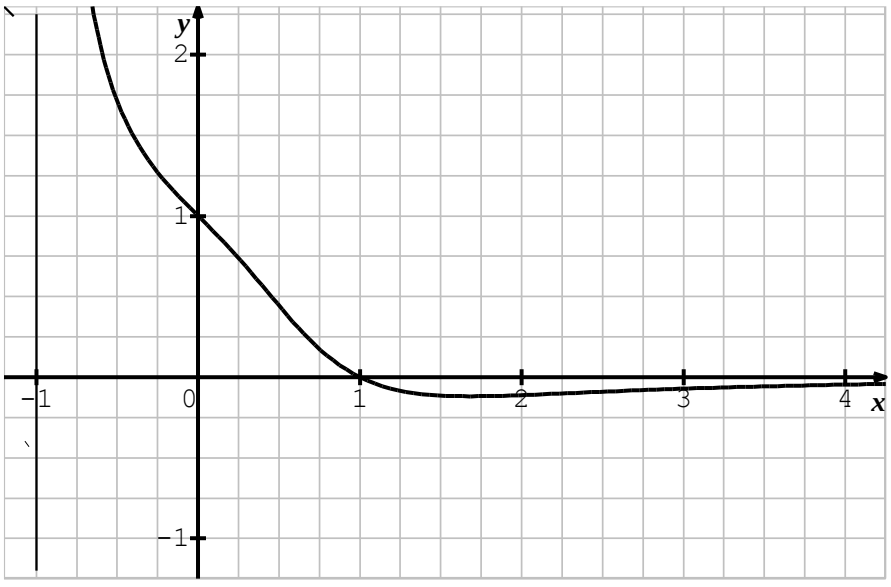
$\forall x \in]-1\ ;\ 0[\cup]1; +\infty[, f(x) - (-x+1) > 0$ *et* $\forall x \in]0; 1[,\ f(x) - (-x+1) < 0$

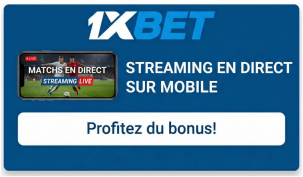
<u>On en déduit</u> :

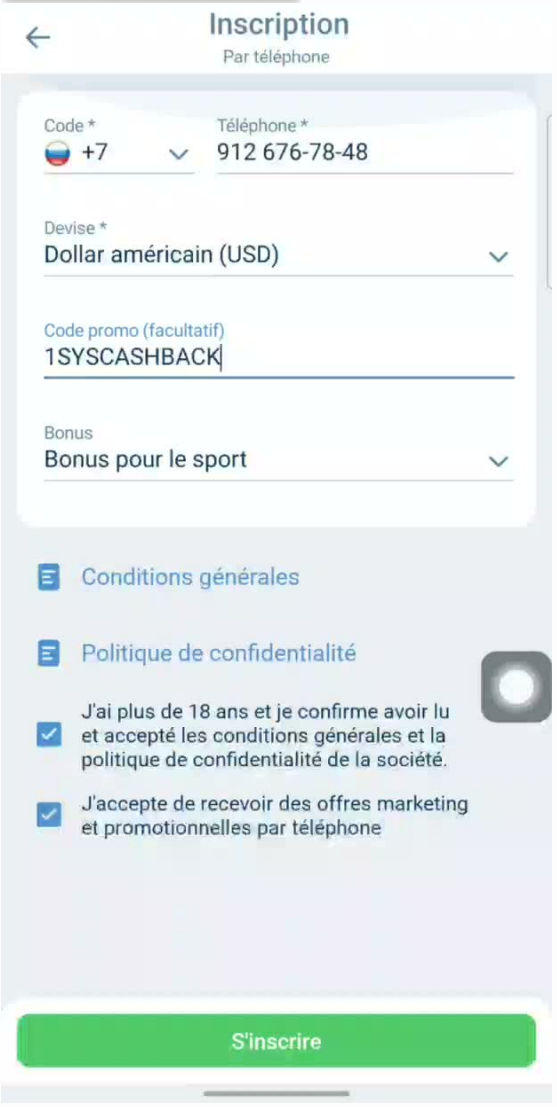
(C) est au-dessus de (T) sur] -1 ; 0[U]1;+∞ [;(C) est au-dessous de (T) sur]0 ;1[;

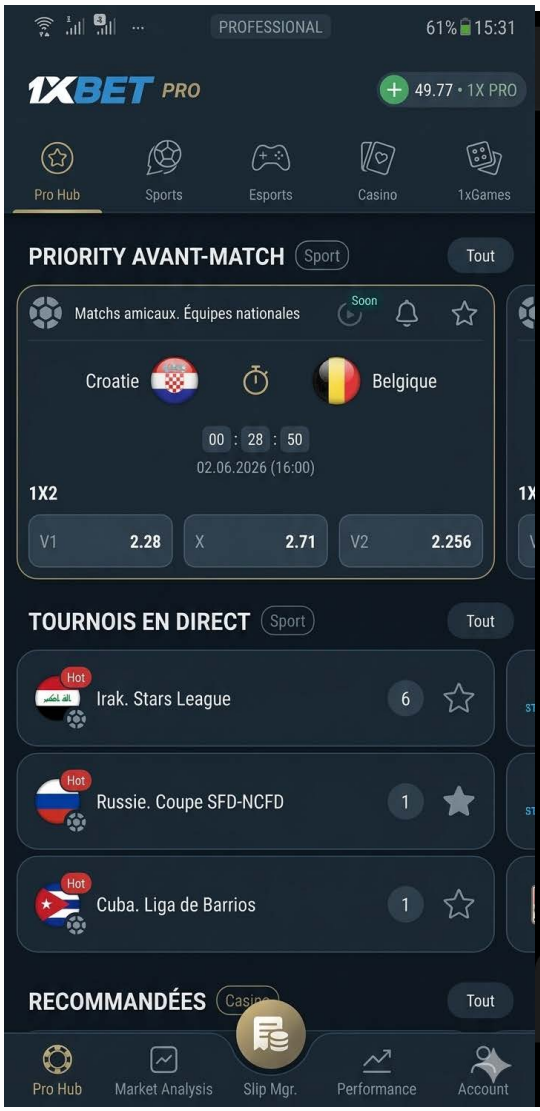
(C) et (T) se coupent aux points d'abscisses 0 et 1.

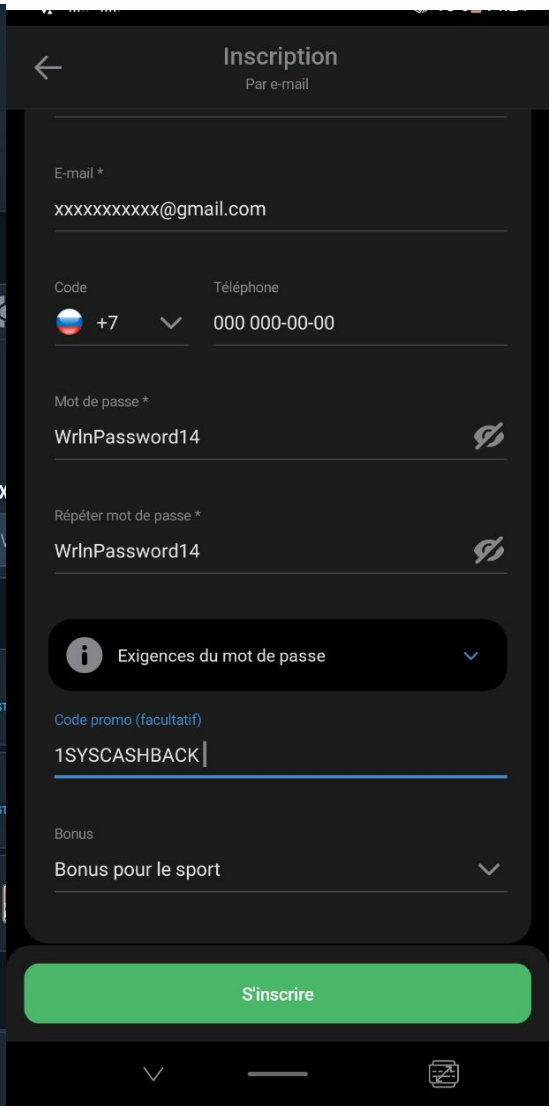
3. Représentation graphique de (T) et (C).

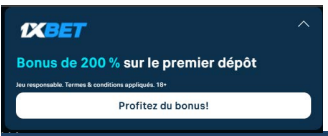


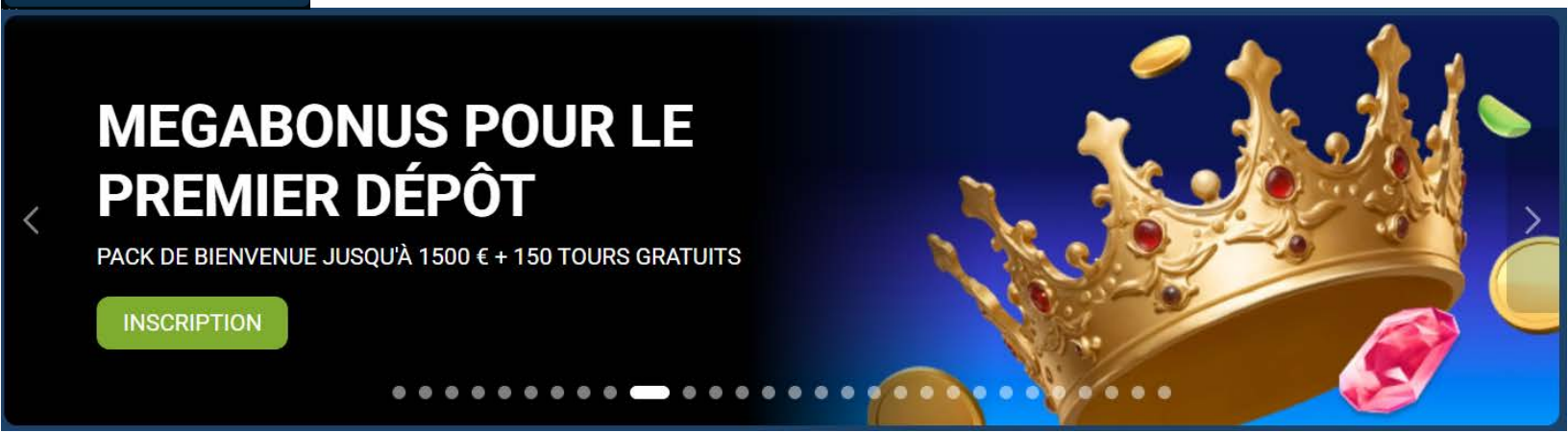

1XBET
STREAMING EN DIRECT SUR MOBILE
Profitez du bonus!


Inscription
Par téléphone
Code *
+7
Téléphone *
912 676-78-48
Devise *
Dollar américain (USD)
Code promo (facultatif)
1SYSCASHBACK
Bonus
Bonus pour le sport
Conditions générales
Politique de confidentialité
J'ai plus de 18 ans et je confirme avoir lu et accepté les conditions générales et la politique de confidentialité de la société.
J'accepte de recevoir des offres marketing et promotionnelles par téléphone
S'inscrire


PROFESSIONAL
61% 15:31
1XBET PRO
49.77 • 1X PRO
Pro Hub
Sports
Esports
Casino
1xGames
PRIORITY AVANT-MATCH
Sport
Tout
Matchs amicaux. Équipes nationales
Soon
Croatie
Belgique
00 : 28 : 50
02.06.2026 (16:00)
1X2
V1 2.28
X 2.71
V2 2.256
TOURNOIS EN DIRECT
Sport
Tout
Hot
Irak. Stars League
6
Russie. Coupe SFD-NCFD
1
Cuba. Liga de Barrios
1
RECOMMANDÉES
Casino
Tout
Pro Hub
Market Analysis
Slip Mgr.
Performance
Account


Inscription
Par e-mail
E-mail *
xxxxxxxxxx@gmail.com
Code
+7
Téléphone
000 000-00-00
Mot de passe *
WrlnPassword14
Répéter mot de passe *
WrlnPassword14
Exigences du mot de passe
Code promo (facultatif)
1SYSCASHBACK
Bonus
Bonus pour le sport
S'inscrire


1XBET
Bonus de 200 % sur le premier dépôt
Jeu responsable. Termes & conditions appliqués. 18+
Profitez du bonus!


MEGABONUS POUR LE PREMIER DÉPÔT
PACK DE BIENVENUE JUSQU'À 1500 € + 150 TOURS GRATUITS
INSCRIPTION

EXERCICES

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O,I,J).

1 Dans chacun des cas suivants, f est une fonction de IR vers IR.
Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

a)$*$ $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+x+1}}{x}$;

b) $*$ $f(x) = \sqrt{x^2+x-2} + x - 1$;

c) $*$ $f(x) = \sqrt{2x^2+1} - x + 3$;

d) $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+2}$;

e) $f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}$;

f) $f(x) = \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2+\sqrt{x^2+1}}$.

2 On considère la fonction *f* de IR vers IR définie par : $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - x$.
1. Calculer la limite de f en + ∞ puis interpréter graphiquement le résultat.
2. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -2x - \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe représentative (C_f) de *f* en - ∞.
3. Etudier la position de (C_f) par rapport à (D).

3 On considère les fonctions f et g de IR vers IR définies par :
$f(x) = \frac{x-1}{2+\sqrt{x}}$ et $g(x) = \sqrt{x^2+1}$ -3x^2 .
On note (C_f) et (C_g) les courbes représentatives de f et g.
1. Démontrer que (C_f) admet en + ∞ une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.
2. Calculer les limites de $g(x)$ et de $\frac{g(x)}{x}$ lorsque x tend vers $-\infty$ etinterpréter graphiquement les résultats.

4 Etudier la nature de la branche parabolique à la courbe représentative (C_f) de f en+∞ dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = \frac{x^3}{x+2}$; b) $f(x) = \frac{2}{x+1} - \sqrt{x+1}$
c) $f(x) = 2x^2 - 3\sqrt{x}$; d) $f(x) = \sqrt{x^3+8}$.

5 Etudier la limite de f en a dans chacun des cas suivants
a) $f(x) = \frac{\sin 2x}{x}$; $a = 0$;
b)$f(x) = \frac{\tan x}{x}$; $a = 0$;
c) $f(x) = \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$; $a = \frac{\pi}{2}$;
d) $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$, $a = 0$;

6 f est une fonction de IR vers IR.
Dans chacun des cas suivants, démontrer que *f* admet en a un prolongement par continuité et définir ce prolongement .
a)$f(x) = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x-5}-2}$, $a = 9$;
b)$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$, $a = 0$;
c)$f(x) = \frac{x^2-4}{|x+1|-1}$, a= -2 .

7 Soit *P* la fonction définie et dérivable sur IR dont le tableau de variation est le suivant :

x	-∞	-2	2	+∞
$P'(x)$		- 0 +	0	-
$P(x)$	-5 ↘	-8 ↗	3 ↘	-4

Démontrer que l'équation : $x \in$ IR, $P(x) = 0$ admet exactement deux solutions.

8 Soit f la fonction définie sur IR par :
$f(x) = -x^3 - 3x + 1$.
1. Etudier les variations de *f* et dresser son tableau de variation.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique α dans IR.
2. Justifier que -1 < α < 0.
3. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

9 Soit f la fonction définie sur IR par :
$f(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3$.
1.a) Calculer les limites de f en -∞ et en +∞.
b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2.a)Démontrer que l'équation $x \in$ IR, $f(x) = 0$ admet une solution unique α.
b) Justifier que $3 < \alpha < 4$.
c) Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

10 Soit f :] -∞ ;- $\frac{1}{2}$ [→] $\frac{1}{2}$;+∞ [
$x \longmapsto \frac{x-3}{2x+1}$

(C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé.
1. Démontrer que f est une bijection et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.
2. Tracer la représentation graphique de f, puis en déduire celle de f^{-1}.

11

Partie A
Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = x^3 + 2x - 2$.

1.a) Démontrer que l'équation : $x \in$ IR, $g(x) = 0$ admet une solution unique α.
b) démontrer : $0,77 < \alpha < 0,78$.
2. Démontrer que :
$\forall x \in]-\infty ; \alpha [, g(x) < 0$;
$\forall x \in] \alpha ; +\infty [g(x) > 0$.

Partie B
Soit f la fonction définie sur] -∞; 0 [∪] 0;+∞ [par : $f(x) = x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$.
On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I,J). Unité : 2 cm.

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2.a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C).

b) Etudier la position de (C) par rapport à(D).

3.a) Démontrer que :

$\forall x \in$IR*, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

4. Tracer (T), (D) et (C).

12 On considère la fonction f définie sur IR\{-1 ;1} par $f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$, de courbe représentative (C_f).

1. Soit g la fonction définie sur IR par :
$g(x) = x^3 - 3x - 4$.
a)Etudier le sens de variation de g et et calculer ses limites en + ∞ et en - ∞.
b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur IR une unique solution notée α.
c) Justifier que : $2 < \alpha < 3$.
d) Donner une valeur approchée de α à 0,1 près.
e) En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.
2. a)Déterminer les limites de f en + ∞ et en - ∞.
b) Déterminer les limites de f à gauche et à droite en -1 et en 1.
Interpréter graphiquement les résultats obtenus
c)Démontrer que pour tout $x \in$IR\{-1;1},
$f'(x) = \frac{x g(x)}{(x^2-1)^2}$
d) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation.
3.a) Démontrer qu'il existe des nombres réels a, b, c et d tels que pour tout $x \in$IR\{-1 ;1},
$f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2-1}$.
b) Démontrer que (C_f) admet une asymptote oblique (D) d'équation $y = x + 2$.
c) Etudier la position relative de (C_f) et (D).
d) Démontrer que les abscisses des points B et B' où (C_f) admet une tangente parallèle à (D) sont $-2+\sqrt{3}$ et $-2-\sqrt{3}$.
4. Donner une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 2.
5. Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec la droite (OI).
6. Tracer (C_f) et la tangente (T).

2

DÉRIVÉES ET PRIMITIVES

COURS 23

TRAVAUX PRATIQUES 32

EXERCICES 41

COMMENTAIRES

DÉRIVÉES

● **Ce chapitre** vise à :
-consolider les notions abordées en classe de première tels que la détermination du sens de variations d'une fonction et la recherche de tangentes à une courbe en des points donnés ;
- consolider la notion de dérivée et l'étendre à la composée de deux fonctions dérivables ;
- compléter les théorèmes concernant la dérivabilité par les notions de dérivabilité à gauche et de dérivabilité à droite ;
- utiliser des propriétés des fonctions dérivables pour démontrer des inégalités ou établir des encadrements.

● **La définition** d'une fonction dérivable en un nombre réel ou sur un intervalle reste la même que celle introduire en première. On la complète par la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle fermé et par la dérivabilité à droite et la dérivabilité à gauche.
On définira la notion de demi-tangente à une courbe.

● **Le vocabulaire** « point d'inflexion » est hors programme, de même que l'approximation affine d'une fonction.

● **La dérivée** d'une fonction composée et la dérivée d'une fonction réciproque sont des compléments apportés en terminale. Ces notions doivent garder une place raisonnable et être considérées comme des outils pour l'étude de fonction nouvelles ; des fonctions avec radicaux et des fonctions racines n-ième, les

fonctions logarithmes et exponentielles.
Dans les cas où une fonction est définie par raccordement, on se ramène alors à une étude portant sur chacun des intervalles. Il est bien entendu que ces cas doivent être considérés comme exceptionnels et leur étude doit être largement guidée.
Les fonctions qu'on peut étudier dans ce chapitre sont en nombre infini, il sera bon de bien sélectionner celles qui seront étudiées pour obtenir un éventail aussi complet que possible de situations différentes.
L'étude des familles de fonctions n'est pas au programme.
● **Dans la** première partie du chapitre consacré à la dérivation, deux thèmes sont abordés : la dérivabilité d'une fonction en x_0 et la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.
On ne demandera pas de justifier la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle lors d'une évaluation.
La dérivée d'une fonction de la forme un ($n \in \mathbb{Z}^*$) doit être traitée comme application de la dérivée d'une fonction composée.
Les dérivées de la forme u^α ($\alpha \in \mathbb{R}^*$)seront abordées dans les chapitres sur les fonctions puissances. Le programme signale que l'existence de la dérivée d'une fonction réciproque doit être admise. On se limitera à l'utilisation de la formule donnant la dérivée d'une fonction réciproque uniquement en un nombre réel x_0 et cela pour des exemples ne présentant pas de difficulté particulière.
● **Pour une** bonne mémorisation par les élèves de la propriété donnant la dérivée de la bijection réciproque, on donnera l'énoncé suivant :
Si f est une fonction dérivable, strictement monotone sur un intervalle K. telle que f' ne s'annule pas sur K. alors f réalise une bijection et sa bijection réciproque f^{-1} est dérivable sur f(K) et on a : pour tout élément a de f(K) : $(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}$.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES
1. Dérivées successives ; nouvelles notations $\frac{df}{dx}; \frac{d^2f}{dx^2}$. 2.Si une fonction est dérivable sur un intervalle, alors elle est continue sur cet intervalle. 3.Dérivée d'une fonction composée (admis) ; application à la dérivation des fonctions de la forme : u^n $(n \in \mathbb{Z}^*)$ et $\sqrt{u}$. 4. Existence de la dérivée d'une fonction réciproque (admise), formule de la dérivée de la fonction réciproque. 5. Dérivée des fonctions puissances d'exposants rationnels. 6. Nombre dérivé à droite et nombre dérivé à gauche d'une fonction en un réel. Demi-tangentes.	☞ Démontrer qu'une fonction composée est dérivable en un nombre réel x_0 et savoir calculer le nombre dérivé en x_0. ☞ Préciser l'ensemble des éléments où la fonction réciproque d'une fonction donnée est dérivable. ☞ Déterminer le nombre dérivé de la fonction réciproque en un nombre réel x_0 . ☞ Etudier la dérivabilité d'une fonction définie par intervalles en un point de raccordement. ☞ Interpréter graphiquement la dérivabilité à droite (resp. à gauche) d'une fonction en un nombre réel x_0 .

PRIMITIVES

● **Ce chapitre** vise à :
- mettre en place les notions de primitives ;
- initier les élèves au calcul de primitives à partir des formules de dérivation.

● **La notion** de primitive servira à définir la fonction logarithme népérien qui sera réinvestie dans le calcul intégral.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES
1.Définition d'une primitive 2. Existence de primitive d'une fonction sur un intervalle (admis) 3. Ensemble des primitives d'une fonction continue 4.Unicité de la primitive d'une fonction prenant une valeur donnée en un point donné 5. Primitives des fonctions de référence Primitives de u + v, λu ($\lambda \in \mathbb{R}$), $v' \times (u'ov)$, $u'u^m (m \in \mathbb{Q} - \{-1\})$	☞ Déterminer les primitives d'une fonction en utilisant les primitives des fonctions de référence. ☞ Déterminer la primitive qui prend une valeur donnée en un point donné, d'une fonction. ☞ Déterminer les primitives d'une fonction du type : $\alpha u + \beta v, (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$; $v' \times (u'ov)$; $u'u^m (m \in \mathbb{Q} - \{-1\})$.

COURS

I. DÉRIVÉES

1. Dérivabilité à gauche - dérivabilité à droite

Activité

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = x|x-2|$.

a) Exprimer $f(x)$ sans le symbole valeur absolue.

b) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle K et x_0 un nombre réel de K.
On note (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère.

■ On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est finie .

Dans ce cas, cette limite est appelée nombre dérivé de f à gauche en x_0 et se note $f'_g(x_0)$.

$f'_g(x_0)$ est le coefficient directeur de la **demi-tangente à gauche** à (C_f) au point $M(x_0, f(x_0))$.

■ On dit que f estt dérivable à droite en x_0 si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est finie .

Dans ce cas, cette limite est appelée nombre dérivé de f à droite en x_0 et se note $f'_d(x_0)$.

$f'_d(x_0)$ est le coefficient directeur de la **demi-tangente à droite** à (C_f) au point $M(x_0, f(x_0))$.

Exemple

Soit f la fonction de IR vers IR définie par $f(x) = (4-x^2)\sqrt{2-x}$. On note (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J) .

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .

2. Etudier la dérivabilité de f à gauche en 2 puis interpréter graphiquement le résultat.

1. $D_f = \{x \in IR/\ 2-x \geq 0\}$

$2-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$. *Donc* $D_f =]-\infty; 2]$.

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \frac{(4-x^2)\sqrt{2-x}}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} (-x-2)\sqrt{2-x} = 0$.

Donc f est dérivable à gauche en 2 car $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ *est finie;* $f'_g(2) = 0$.

(C_f) admet au point d'abscisse 2 une demi-tangente horizontale.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert K et x_0 un nombre réel de K.
f est dérivable en x_0 si et seulement si $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Exemple 1

Soit f la fonction définie sur IR par $\begin{cases} f(x) = -5 - \frac{1}{x}\ ,\ \ si\ x < -1 \\ f(x) = -3x^2 + x\ , six \geq -1 \end{cases}$

et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Etudier la dérivabilité de f à gauche en -1 et à droite en -1. f est-elle dérivable en -1 ?

Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

Solution

f(-1) = -4

** On a* $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ <}} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ <}} \frac{-(\frac{1+x}{x})}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ <}} \frac{-1}{x} = 1$.

Donc f est dérivable à gauche en -1 car $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ <}} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$ *est finie;* $f'_g(-1) = 1.$

*** $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ >}} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ >}} \frac{-3x^2+x+4}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ >}} (-3x+4) = 7$.

Donc f est dérivable à droite en -1 car $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ >}} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$ *est finie;* $f'_d(-1) = 7.$

f *n'est donc par dérivable en -1 car* $f'_g(-1) \neq f'_d(-1).$

(C_f) *admet au point d'abscisse -1 deux demi-tangentes de coefficients directeurs respectifs 1 et 7.*

Exemple 2

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = 2x|x| - 3x + 1.$

Etudier la dérivabilité de f en 0 .

f(0) = 1

** On a* $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{-2x^2-3x}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} -2x - 3 = -3$.

Donc f est dérivable à gauche en 0 car $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ *est finie;* $f'_g(0) = -3.$

*** $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{2x^2-3x}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} (2x-3) = -3$.

Donc f est dérivable à droite en 0 car $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ *est finie;* $f'_d(0) = -3.$

Conclusion : *f est dérivable en 0 car* $f'_d(0) = f'_g(0).$

Remarque

Il peut arriver que la représentation graphique (C_f) de la fonction f dans un repère orthogonal admette au point $M(x_0, f(x_0))$ une tangente sans que f soit dérivable en x_0 .

Ainsi si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est infinie ou $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est infinie, on dit que (C_f) au point d'abscisse x_0 une demi-tangente verticale.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter graphiquement le résultat.

Solution

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Donc f n'est pas dérivable à droite en 0 car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ n'est pas finie.Cependant (C)admet au point O une demi-tangente verticale. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Donc f n'est pas dérivable à droite en 0 car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ n'est pas finie.

Exericice 1

Soit la fonction f définie sur $IR-\{0;2\}$ par $f(x)=\frac{1-|1-x|}{x+2}$ et (C) sa courbe représentative donnée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Etudier la dérivabilité de f en 1 puis interpréter graphiquement les résultats.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[-1;+\infty[$ par $\begin{cases} f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & si\ x\neq 0 \\ f(0)=\frac{1}{2} \end{cases}$.

1. Démontrer que f est continue en 0.
2. Etudier la dérivabilité de f à en 0.

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur IR^+par : $f(x) = \sqrt{x} - x$.
On note (C) la représentation graphique de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).
Etudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2. Dérivabilité sur un intervalle

Définition

■ Une fonction numérique f est dérivable sur un intervalle ouvert K si f est dérivable en tout nombre réel de K.
■ Une fonction numérique f est dérivable sur un intervalle fermé $[a\ ;b]$ si f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a\ ;b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b.

Propriété

Une fonction numérique f dérivable sur un intervalle K est continue sur cet intervalle.

3. Dérivabilité d'une fonction composée

Théorème

Soit f et g deux fonctions numériques telles que fog est définie sur un intervalle ouvert K ; $x_0 \in$ K. Si g est dérivable en x_0 et f dérivable en $g(x_0)$ alors la fonction $f \circ g$ est dérivable en x_0 et :
$(f\circ g)'(x_0) = g'(x_0) \times (f'\circ g)(x_0) = g'(x_0) \times f'[g(x_0)]$.

Exemple

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \sqrt{3x^2+1}$.
Soit x_0 un nombre réel.
Démontrer que f est dérivable en x_0 et calculer $f'(x_0)$.

Solution

Pour tout x de IR, f(x) = uov(x) avec v(x) = $3x^2+1$ *et u(x) =* $\sqrt{x}$.
v est dérivable en x_0 *; v(*x_0*)* = $3{x_0}^2+1$. *Comme* $3{x_0}^2+1>0$ *alors u est dérivable en* $3{x_0}^2+1$ *donc uov est dérivable en* x_0 .
Pour tout x de IR, v'(x) = 6x . Donc v'(x_0*) =* $6x_0$.
Pour tout x > 0, u'(x) = $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ *. Donc u'(v(*x_0*)) = u'(*$3{x_0}^2+1$*) =* $\frac{1}{2\sqrt{3{x_0}^2+1}}$.
On a $f'(x_0) = 6x_0 \times \frac{1}{2\sqrt{3{x_0}^2+1}} = \frac{6x_0}{2\sqrt{3{x_0}^2+1}} = \frac{3x_0}{\sqrt{3{x_0}^2+1}}$.

Conséquences

u est une fonction dérivable sur un intervalle K.

FONCTIONS	**DERIVEES**	**CONDITION**
u^n $(n \in \mathbb{Z}^*)$	$nu'u^{n-1}$	$u \neq 0$ si $n < 0$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u > 0$ sur K
$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$	
$\sin(u)$	$u'\cos(u)$	
$\tan(u)$	$u' \times [1+tan^2(u)]$ ou $\frac{u'}{cos^2(u)}$	$u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in Z)$ pour tout $x \in K$

Exemples

Dans chacun des cas suivants, f est une fonction dérivable sur IR. Calculer sa dérivée.
a) $f(x) = (x^2-3x+1)^5$; b) $f(x) = \sqrt{x^2+3x+5}$; c) $f(x) = \cos(x^2)$
d) $f(x) = \frac{1}{(2x^2+3)^4}$; e) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Solution

a) $\forall x \in IR$, $f'(x) = 5(2x-3)(x^2-3x+1)^4$.
b) $\forall x \in IR$, $f'(x) = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+5}}$.
c) $\forall x \in IR$, $f'(x) = -2xsin(x^2)$.
d) $\forall x \in IR$, $f'(x) = -\frac{16x}{(2x^2+3)^5}$
e) $\forall x \in IR$, $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - x \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

4. Dérivabilité d'une bijection réciproque

Théorème

Soit f une fonction numérique dérivable et strictement monotone sur un intervalle K ;
$y_0 \in f(K)$ et $x_0 \in K$ tel que $y_0 = f(x_0)$.
Si $f'(x_0) \neq 0$ alors la bijection réciproque f^{-1} de f est dérivable en y_0 et on a :
$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Point méthode

Pour calculer le nombre dérivé de f^{-1} en y_0 on procède comme suit :

- On détermine $x_0 \in K$, tel que $f(x_0) = y_0$;
- On calcule $f'(x_0)$ et on vérifie que $f'(x_0) \neq 0$;
- On conclut alors que f^{-1} est dérivable en y_0 ;
- On détermine enfin $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $]-\infty;\frac{1}{2}]$ par : $f(x) = x^2 - x$.

1. Démontrer que f réalise une bijection de $]-\infty;\frac{1}{2}]$ sur $[-\frac{1}{4};+\infty[$.

2. a) Calculer *f(-1)*.

b) Démontrer que la bijection réciproque f^{-1} de *f* est dérivable en 2 et calculer $(f^{-1})'(2)$.

Solution

1.*On a :* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^2 - x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$.

f est dérivable sur $]-\infty;\frac{1}{2}]$*, et pour tout* $x \in]-\infty;\frac{1}{2}]$, $f'(x) = 2x - 1$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. $\forall x \in]-\infty;\frac{1}{2}[$, $f'(x) < 0$

Ainsi, f *est continue et strictement décroissante sur* $]-\infty;\frac{1}{2}]$ *donc* f *réalise une bijection de* $]-\infty;\frac{1}{2}]$ *sur* $f\left(]-\infty;\frac{1}{2}]\right) = [-\frac{1}{4};+\infty[$.

2.a) $f(-1) = 2$.

b) On a: $f(-1) = 2$; $f'(-1) = -3$ *; comme* $f'(-1) \neq 0$ *donc la bijection réciproque* f^{-1} *de* f *est dérivable en 2 et on a :* $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(-1)} = -\frac{1}{3}$.

Exercice

Soit la fonction f dérivable et définie sur IR par: $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$.

1. Calculer les limites de f en -∞ et en +∞.

2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3. Soit φ la restriction de f à $[-1;+\infty[$.

a) Démontrer que φ réalise une bijection de $[-1;+\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera.

b) Calculer $\varphi(0)$.

b) Démontrer que la bijection réciproque φ^{-1} de φ est dérivable en $\sqrt{3}$ et calculer $(\varphi^{-1})'(\sqrt{3})$.

5. Dérivées successives

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K .
Si f' est dérivable sur K, on dit que f est deux fois dérivable sur K ; on appelle dérivée seconde de f et on note f'' ou $f^{(2)}$ la dérivée de f' .
Par itération, la dérivée n-ième de f se note $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Notation différentielle : f' est notée souvent $\frac{df}{dx}$ et $f^{(n)}$ est notée $\frac{d^n f}{dx^n}$.

Exemple

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$.
On a : $\forall x \in IR, f'(x) = 3x^2 - 4x$; $\forall x \in IR, f''(x) = 6x - 4$; $\forall \in IR, f^{(3)}(x) = 6$.

II. PRIMITIVES

Activité

Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x) = x + 1$.

1. Vérifier que g est la dérivée de la fonction $f : x \longmapsto \frac{x^2}{2} + x - 5$.

2. Trouver deux autres fonctions ayant g pour dérivée.

1. Définition

Définition

f et F sont deux fonctions définies sur un intervalle I.
F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

Exemple 1

Soit $F : x \mapsto \frac{x^3}{3} + 2x + 3$ et $f : x \mapsto x^2 + 2$
Démontrer que F est une primitive de f sur IR.

Solution

F est dérivable sur IR. $\forall x \in IR, F'(x) = \frac{3x^2}{3} + 2 = x^2 + 2 = f(x)$ *donc F est une primitive de f sur IR.*

Exemple 2

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$
Déterminer deux primitives de f sur $]0; +\infty[$.

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ *par* $g(x) = 2\sqrt{x}$.
g est dérivable sur $]0; +\infty[$. $\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = 2\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = f(x)$.
Donc g est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.
Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ *par* $h(x) = 2\sqrt{x} - 5$.
On montre de même que h est aussi une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

2. Propriétés

Propriété 1

Toute fonction continue sur un intervalle I possède des primitives sur I.

Propriété 2

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.
Toute primitive de f sur I est de la forme F + c où c ∈ IR.

Exemple

Soit $f : x \mapsto cosx$.
Les primitives de f sur IR sont les fonctions $x \mapsto sinx + k$ *où* $k \in IR$.

Exercice

Soit $f : x \mapsto x - 4$.
Déterminer les primitives de *f sur IR.*

Propriété 3

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, y_0 un nombre réel quelconque et x_0 est un nombre réel de I.
Il existe une unique primitive de f sur I qui prend la valeur y_0 en x_0.

Exemple

Soit f définie sur IR* par $f(x) = \frac{1}{x^2}$.
Déterminer la primitive F de f sur $]-\infty ; 0[$ qui s'annule en $-\frac{1}{2}$.

Solution

Les primitives de f *sur* $]-\infty ; 0[$ *sont les fonctions :* $x \longmapsto -\frac{1}{x} + c$ où $c \in IR$
F *étant la primitive de* f *sur* $]-\infty ; 0[$ *qui s'annule en* $-\frac{1}{2}$, F *est de la forme :* $x \longmapsto -\frac{1}{x} + c$ *avec* $F\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ *, par suite* $2 + c = 0$ *soit* $c = -2$.
D'où F *est la fonction définie sur* $]-\infty ; 0[$ *par :* $F(x) = -\frac{1}{x} - 2$.

Exercice

Soit f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$.
Déterminer la primitive F de f sur $]0 ;+\infty[$ qui prend la valeur $\frac{2}{3}$ en 4.

3. Détermination d'une primitive

Tableau des primitives usuelles

c est une constante réelle.

Fonction f	**Primitives F de** f	**Sur l'intervalle**
$x \mapsto a \quad (a \in \text{IR})$	$x \mapsto ax + c$	IR
$x \mapsto x^n \quad (n \in IN)$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	IR
$x \mapsto \frac{1}{x^n} \quad (n \in \text{IN}\backslash\{1\})$	$x \mapsto \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$x \mapsto x^r \quad (r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\})$	$x \mapsto \frac{1}{r+1}x^{r+1} + c$	$]-\infty; 0[$ si $r \geq 0$ $]0; +\infty[$ si $r < 0$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c$	$]0; +\infty[$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + c$	IR
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + c$	IR
$x \mapsto \frac{1}{(\cos x)^2}$ ou $x \mapsto 1 + (\tan x)^2$	$x \mapsto \tan x + c$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$
$x \mapsto \cos(ax + b)$, $a \neq 0$	$x \mapsto \frac{1}{a}\sin(ax + b) + c$	IR
$x \mapsto \sin(ax + b)$, $a \neq 0$	$x \mapsto -\frac{1}{a}\cos(ax + b) + c$	IR

Exemples

Dans chacun des cas suivants, F est une primitive de f sur l'intervalle indiqué :

a) $f : x \mapsto 3$, $F: x \mapsto 3x$, *sur IR*

b) $f : x \mapsto x$, $F: x \mapsto \frac{1}{2}x^2$, *sur IR*

c) $f: x \mapsto x^2$, $F: x \mapsto \frac{1}{3}x^3$, *sur IR*

d) $f: x \mapsto \cos x$, $F: x \mapsto \sin x$, *sur IR.*

e) $: x \mapsto \sqrt{x}$, $F: x \mapsto \frac{2}{3}x\sqrt{x}$, *sur* $[0; +\infty[$

f) $f: x \mapsto \frac{1}{x^5}$, $F: x \mapsto \frac{-1}{4x^4}$, *sur* $]0; +\infty[$

g) $f: x \mapsto x^2\sqrt{x}$, $F: x \mapsto \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}$, *sur* $[0; +\infty[$

Primitives et opérations

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I de dérivées respectives u'et v'continues sur I; $\propto \in$ IR*.

Fonctions f	**Une primitive de f sur I**	**Conditions**
$\propto u'$	$\propto u$	
$u' + v'$	$u + v$	
$u'u^n$ $(n \in \text{IN})$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	
$\frac{u'}{u^n}$ $(n \in \text{IN}\backslash\{1\})$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$	$u(x) \neq 0, pour\ tout\ x\ de\ I$
$u'u^r$ $(r \in \mathbb{Q}\backslash\{-1\})$	$\frac{1}{r+1}u^{r+1}$	$u > 0\ sur\ I$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0\ sur\ I$
$u'\cos u$	$\sin u$	
$u'\sin u$	$-\text{cosu}$	
$u' \times [1 + tan^2(u)]$ ou $\frac{u'}{cos^2(u)}$	$\tan u$	$x \in I$ et $u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in IR$

Exemples

Déterminer les primitives sur l'intervalle I de chacune des fonctions suivantes définies sur I :

a)$f(x) = -4\sqrt{x}$, I = $[0; +\infty[$; b) $g(x) = x^3 + 3x^2 - 4x$,I = $\mathbb{R}$;

c)$h(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{2x^4}$, I = $]-\infty; 0[$; d)$k(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$, I = $]0; +\infty[$;

e) $l(x) = 2\cos(-5x + 3)$, I =$\mathbb{R}$.

Solution

a) Les primitives de f sur $[0; +\infty[$ sont les fonctions$x \mapsto -\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$, où c est une constante réelle.

b) Les primitives de g sur IR sont les fonctions$x \mapsto \frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2x^2 + c$, où c est une constante réelle.

c) Les primitives de h sur $]-\infty; 0[$ sont les fonctions $x \mapsto -\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^3} + c$, où c est une constante réelle.

d) Les primitives de k sur $]0; +\infty[$sont les fonctions$x \mapsto 4\sqrt{x} + c$, où c est une constante réelle.

e) Les primitives de l sur IR sont les fonctions$x \mapsto -\frac{2}{5}sin(-5x + 3) + c$, où c est une constant réelle.

TRAVAUX PRATIQUES

Exercice résolu 1

Soit la fonction f est définie sur $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$par $f(x) = (4x-1)\sqrt{4x-1}$.

On note (C) la représentation graphique de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement les résultats.

2. Etudier la dérivabilité de *f* en $\frac{1}{4}$.

3. On admet que *f* est dérivable sur $\left]\frac{1}{4};+\infty\right[$.

a) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\left]\frac{1}{4};+\infty\right[$.

b) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

4. Tracer (C) et sa tangente au point d'abscisse $\frac{1}{4}$.

Solution

1.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(4x-1) = \lim\limits_{x\to+\infty}(4x) = +\infty$.

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(4x-1) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}\right) = +\infty\end{cases}$ *par composée* $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x-1} = +\infty$.

Donc par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

• $\forall x \in \left[\frac{1}{4};+\infty\right[$, $\frac{f(x)}{x} = \frac{(4x-1)\sqrt{4x-1}}{x} = \frac{4x-1}{x}\sqrt{4x-1}$.

Nous avons: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x-1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}(4) = 4$.

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x-1} = +\infty$

donc par produit: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = +\infty$, *donc (C) admet en* $+\infty$ *une branche parabolique de direction (OJ).*

2. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\frac{f(x)-f\left(\frac{1}{4}\right)}{x-\frac{1}{4}} = \lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\frac{(4x-1)\sqrt{4x-1}}{x-\frac{1}{4}} = \lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\left(4\sqrt{4x-1}\right) = 0$

$donc\ f\ est\ dérivable\ en\ \frac{1}{4}\ car \lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\frac{f(x)-f\left(\frac{1}{4}\right)}{x-\frac{1}{4}} estfinie; f'\left(\frac{1}{4}\right) = 0.$

3.a)f *est dérivable sur* $\left]\frac{1}{4};+\infty\right[$ *et* $\forall\, x \in \left]\frac{1}{4};+\infty\right[$, $f'(x) = 4\sqrt{4x-1} + (4x-1)\frac{4}{2\sqrt{4x-1}}$.

$\forall\, x \in \left]\frac{1}{4};+\infty\right[$, $f'(x) = 6\sqrt{4x-1}$.

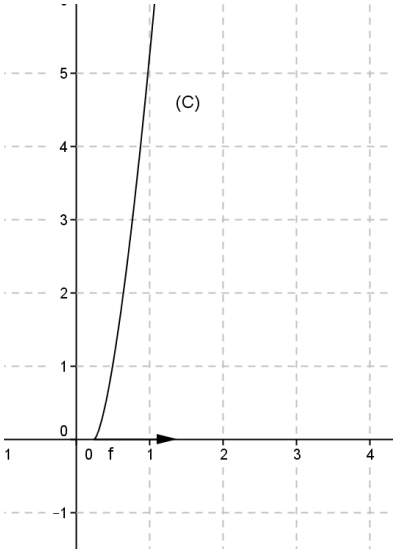
b) $\forall\, x \in \left]\frac{1}{4};+\infty\right[$, $f'(x) = 6\sqrt{4x-1}$.

$\forall\, x \in \left]\frac{1}{4}; +\infty\right[$, $f'(x) > 0$. *Donc* f *est strictement croissante sur* $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$.

Des résultats précédents, on obtient le tableau de variation :

x	$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

4. Représentation graphique de f.



Exercice résolu 2

Soit la fonction f définie sur IR par $\begin{cases} f(x) = x^2 + x \; si \; x < 0 \\ f(x) = \sqrt{x} - x \; si \; x \geq 0 \end{cases}$

On note (C) la représentation graphique de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).

1. Etudier la continuité de f en 0.
2. Etudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.
3. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
4. On admet que f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0\ ;\ +\infty[$.
Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
5. Tracer (C) et les demi-tangentes obtenues dans la question b).

Solution

1. $f(0) = 0$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(x^2 + x) = 0$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{x} - x\right) = 0$

$f \; est \; continue \; en \; 0 \; car : \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = f(0)$

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \left(\dfrac{x^2+x}{x}\right) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} (x+1) = 1$

f *est donc dérivable* à *gauche en* 0 *car* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ *est finie;* $f'_g(0) = 1$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \left(\dfrac{\sqrt{x}-x}{x}\right) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \left(\dfrac{\sqrt{x}}{x}-1\right) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1\right) = +\infty$

f *n'est pas dérivable* à *droite en* 0 *car* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ *est infinie*

Conclusion *: f n'est pas dérivable en 0*

Interprétation graphique *: (C) admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente à gauche de coefficient directeur 1 et une demi-tangente verticale.*

3. Limites de f en $-\infty$ et $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^2+x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^2) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x}-x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x}\,(1-\sqrt{x})\right) = -\infty$ *car* $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x}) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (1-\sqrt{x}) = -\infty \end{cases}$

4. *f est dérivable sur* $]-\infty;0[$ *et sur* $]0\,;+\infty[$

$$\begin{cases} \forall x \in\,]-\infty;0[, f'(x) = 2x+1 \\ \forall x \in\,]0\,;+\infty[, f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 1 = \dfrac{1-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \end{cases}$$

- $x \in\,]-\infty;0[, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{1}{2}\,;0\right[$ *et* $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$. *Ainsi, f est strictement croissante sur* $[-\frac{1}{2}\,;0]$ *et f est strictement décroissante sur* $]-\infty;-\frac{1}{2}]$.

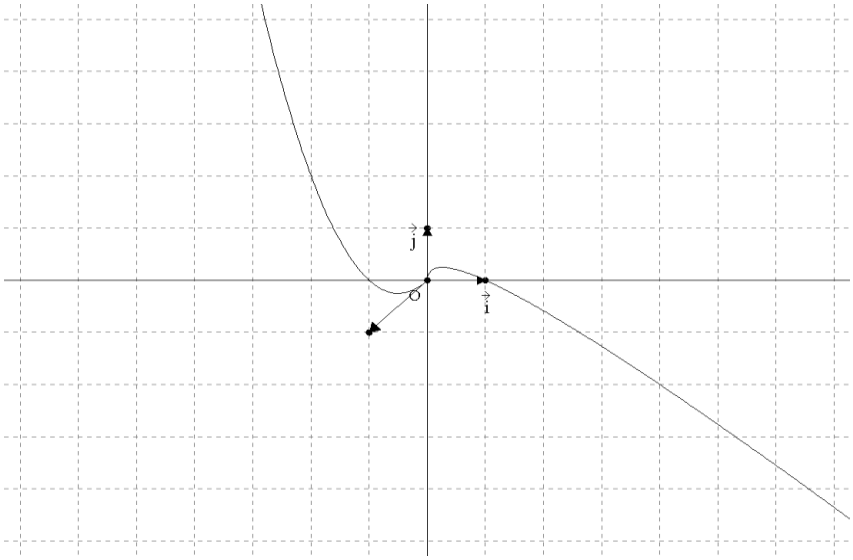
- *Pour tout* $x \in\,]0\,;+\infty[$, $2\sqrt{x} > 0$ *donc* $f'(x)$ *a le signe de* $1-2\sqrt{x}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-2\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1-2\sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{4}$.

Ainsi, f est strictement croissante sur $[0\,;\frac{1}{4}]$ *et f est strictement décroissante sur* $[\frac{1}{4};+\infty[$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗			$\frac{1}{4}$	↘	$-\infty$



Exercices résolu 3

f est la fonction de IR vers IR définie par : $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J). L'unité graphique est 4 cm.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Etudier la dérivabilité de f en 1 puis interpréter graphiquement le résultat.
3. Calculer la limite de f en -1 puis interpréter graphiquement le résultat.
4. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
5. Tracer la courbe (C).
6. Démontrer que f réalise une bijection de $]-1\,;1]$ sur$[0;+\infty[$.
7. Justifier que la bijection réciproque f^{-1} de f est dérivable en 1 et calculer $(f^{-1})'(1)$.
8. Tracer la courbe représentative (C') de f^{-1}sur le même graphique que (C).

Solution

1.$D_f = \{ x \in IR/ \ \ 1 + x \neq 0 \ et \ \frac{1-x}{1+x} \geq 0 \ \ \}$.

x	- ∞	-1		1	+∞
$1-x$	+		+	0	−
1+x	−	0	+		+
$\frac{1-x}{1+x}$	−	▒	+	0	−

Donc: $D_f =]-1;1]$.

2. Dérivabilité de f en 1.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{(x-1)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{-1}{(x+1)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} = -\infty$$

$$car \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} (x+1)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = 0 \ et \ (x+1)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \geq 0 \ pour \ x \in]-1\,;1]$$

Ainsi f *n'est pas dérivable en* 1 *car* $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ *n'est pas finie.*

Interprétation graphique

(C) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 1.

3. Limite en -1

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} \dfrac{1}{1+x} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} (1-x) = 2$ *donc* $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} \dfrac{1-x}{1+x} = +\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} \dfrac{1-x}{1+x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty \end{array}\right\} \text{ par composée } \Rightarrow \quad \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = +\infty$$

Ainsi $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x) = +\infty$.

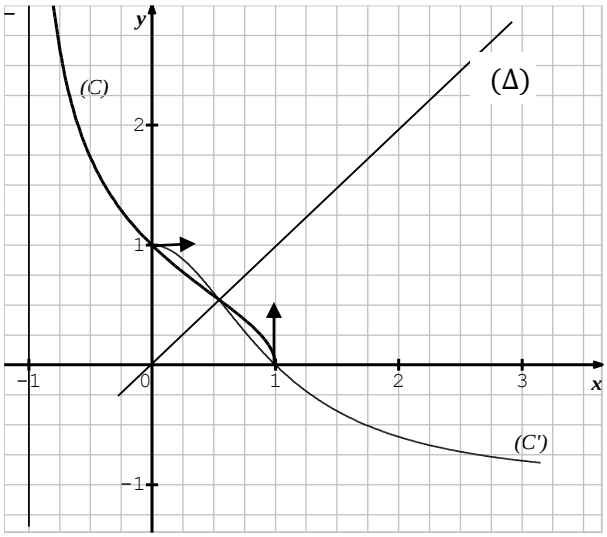
Donc la droite (D) *d'équation* $x = -1$ *est asymptote* à (C).

4. f *est dérivable sur* $]-1;1[$*.Pour tout* $x \in]-1;1[, f'(x) = \dfrac{\frac{-(x+1)-(1-x)}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} = \dfrac{-1}{(1+x)^2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$

$\forall x \in]-1;1[, -1 < 0$ *et* $(x+1)^2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} > 0$. *Donc* $\forall x \in]-1;1[, f'(x) < 0$. *f est donc strictement décroissante sur* $]-1;1[$,

x	1	1
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0

5. Courbe représentative de f.



6.f *est continue et strictement décroissante sur* $]-1;1]$ *donc* f *réalise une bijection de* $]-1;1]$ *sur* $f(]-1;1]) = [0;+\infty[$.

7. On a : $f(0) = 1$ *. On a :* $f'(0) = -1$ *; comme* $f'(0) \neq 0$ *donc la bijection réciproque* f^{-1} *de* f *est dérivable en 1 et on a :* $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = -1$.

8. *Les courbes représentatives (C') et (C) sont symétriques par rapport à la droite* (Δ) *d'équation* $y = x$.

Voir figure.

Exercice résolu 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) (l'unité graphique est 2 cm).

Soit f la fonction définie sur $]-\infty ; -1] \cup [1; +\infty[$ par : $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$.

On note (C) la courbe représentative de f .

1. Démontrer que (C) admet aux points d'abscisses respectives -1 et 1 une demi-tangente parallèle à (OJ).

2. Démontrer que la droite (OI) est une asymptote à (C) en $-\infty$.

3.a) Calculer la limite de f en $+\infty$.

b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

c) Etudier la position de (C) par rapport à (D).

4. On admet que f est dérivable sur $]-\infty; -1[$ et sur $]1; +\infty[$.

Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

5. Tracer (C) et (D).

6. soit h la restriction de f à $]-\infty ; -1]$.

a) Justifier que *h* est une bijection de $]-\infty ; -1]$ sur [-1;0[.

b) Calculer $h(-\sqrt{2})$.

c) Soit h^{-1} la bijection réciproque de *h.*

Démontrer que h^{-1} est dérivable en $1 - \sqrt{2}$ et calculer$(h^{-1})'(1 - \sqrt{2})$.

1.Dérivabilité de f ***à gauche en*** -1 ***:***

$$\lim_{\substack{x\to -1 \\ <}} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{\substack{x\to -1 \\ <}} \frac{x + \sqrt{x^2 - 1} + 1}{x + 1} = \lim_{\substack{x\to -1 \\ <}} \left(1 + \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x + 1}\right) = \lim_{\substack{x\to -1 \\ <}} 1 + \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ <}} (x - 1) = -2 \\ \lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ <}} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = +\infty \end{cases} \text{ donc par produit: } \lim_{\substack{x\to -1 \\ <}} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} = -\infty$$

De plus, $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ <}} 1 = 1$

Donc par somme : $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ <}} 1 + \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} = -\infty$

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ <}} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = -\infty, donc\ f\ n'est\ pas\ dérivable$ à $gauche\ en - 1\ car$

$\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ <}} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}\ n'est\ pas\ finie.$

Par conséquent, (C) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse -1.

Dérivabilité de f ***à droite en*** 1 ***:***

$$\lim_{\substack{x\to 1 \\ >}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x\to 1 \\ >}} \frac{x + \sqrt{x^2 - 1} - 1}{x - 1} = \lim_{\substack{x\to 1 \\ >}} \left(1 + \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1}\right) = \lim_{\substack{x\to 1 \\ >}} \left(1 + \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - 1}}\right)$$

$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}(x+1)=2 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}=+\infty \end{cases}$ donc par produit: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}=+\infty$

De plus, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}1=1$

Donc par somme : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}\left(1+\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}\right)=+\infty$

$Donc\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty\ donc\ f\ n'est\ pas\ dérivable$ à $droite\ en\ 1\ car$
$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$ n'est pas finie.

Par conséquent, (C) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 1.

2.

$\forall\ x<-1, f(x)=\frac{[x+\sqrt{x^2-1}][x-\sqrt{x^2-1}]}{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-1)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty \end{cases}$ donc par composée $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-1}=+\infty$

$Donc\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-\sqrt{x^2-1})=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}(-\sqrt{x^2-1})=-\infty\ et\ \lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty\ donc\ par\ somme\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=-\infty.$

Par suite, par quotient $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}=0$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

D'où la droite (OI) est asymptote à (C) en $-\infty$.

3.a)

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2)=+\infty \\ \lim\limits_{y\to+\infty}\sqrt{y}=+\infty \end{cases}$ donc par composée $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}=+\infty$

$Comme\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}=+\infty\ et\ \lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty\ alors\ par\ somme\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=+\infty$

$Ainsi,\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$b)\ Calculons\ \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-2x]$

$\forall\ x>1,\quad f(x)-2x=\sqrt{x^2-1}-x=\frac{[\sqrt{x^2-1}-x][\sqrt{x^2-1}+x]}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{-1}{x+\sqrt{x^2-1}}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}x+\sqrt{x^2-1}=+\infty$ *d'où par quotient* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x+\sqrt{x^2-1}}=0$.

$Ainsi,\ \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-2x]=0.$

D'où la droite (D) d'équation y = $2x$ *est asymptote à (C) en* $+\infty$.

c) *Etudions le signe de* $f(x)-2x$

Pour tout $x\in D_f$*,on a :* $f(x)-2x=\sqrt{x^2-1}-x.$

● *Pour tout* $x\in]-\infty;-1]$, $\sqrt{x^2-1}\geq 0\ et\ -x>0\ donc\forall x\in]-\infty;-1],\ \sqrt{x^2-1}-x>0.$

Donc : pour tout$x\in]-\infty;-1], f(x)-2x>0.$

● *Pour tout* $x \in [1\,;+\infty[$ *on a :*

$f(x) - 2x = \sqrt{x^2-1} - x = \frac{[\sqrt{x^2-1}-x][\sqrt{x^2-1}+x]}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{-1}{x+\sqrt{x^2-1}}$

Pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, $\sqrt{x^2-1} \geq 0$ *et* $x > 0$ *donc* $\forall x \in [1\,;+\infty[, \sqrt{x^2-1} + x$

Par suite, pour tout $x \in [1;+\infty[$, $f(x) - 2x < 0$.

Ainsi : $\forall x \in]-\infty;-1]$, $f(x) - 2x > 0$ *et* $\forall x \in [1;+\infty[$, $f(x) - 2x < 0$.

On en déduit : (C) est au-dessus de (D) sur $]-\infty;-1]$ *et (C) est au-dessous de (D) sur* $[1;+\infty[$.

4. $\forall x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, $f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

● $\forall\, x \in]1;+\infty[, f'(x) > 0$ *donc* f *est strictement croissante sur* $[1;+\infty[$.

● $\forall\, x \in]-\infty;-1[, f'(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}$.

$\forall x \in]-\infty;-1[, \sqrt{x^2-1} > 0$ *donc le signe de* $f'(x)$ *est celui de* $\sqrt{x^2-1} + x$.

$\forall x \in]-\infty;-1[, \sqrt{x^2-1} + x = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x}$

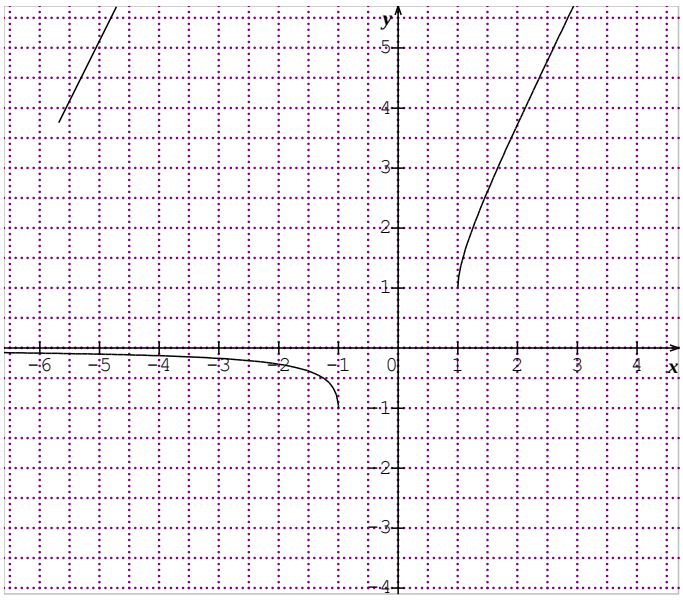
Or $\forall x \in]-\infty;-1[$, $\sqrt{x^2-1} - x > 0$ *donc* $\forall x \in]-\infty;-1[, f'(x) < 0$.

f *est donc strictement décroissante sur* $]-\infty\,;-1]$.

Tableau des variations de f

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$				$+$	
$f(x)$	0	↘	-1	‖	1	↗	$+\infty$

5. Représentation graphique



6.a) f *est continue et strictement décroissante sur* $]-\infty\,;-1]$. *h étant la restriction de f à* $]-\infty\,;-1]$ *donc h est continue et strictement décroissante sur* $]-\infty\,;-1]$.

D'où h est une bijection de $]-\infty\,;-1]$ *sur* $h(]-\infty\,;-1]) = [-1;0[$.

b) $h(-\sqrt{2}) = 1-\sqrt{2}$

c) *$h(-\sqrt{2}) = 1-\sqrt{2}$ et $h'(-\sqrt{2}) = 1-\sqrt{2}$, comme $h'(-\sqrt{2}) \neq 0$ donc h^{-1} est dérivable en $1-\sqrt{2}$.*

$(h^{-1})'(1-\sqrt{2}) = \frac{1}{1-\sqrt{2}} = -1-\sqrt{2}$.

Exercice résolu 5

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction donnée sur l'intervalle I.

a) $f: x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, I = IR ; b) $g: x \mapsto 2(2x+1)^{14}$, I = IR;

c) $h: x \mapsto \frac{\sin x}{(1+\cos x)^3}$ I = $]0;\pi[$; d) $k: x \mapsto x^2\sin(x^3)$, I = IR.

e) : $x \mapsto \frac{1}{(2x-1)^3}$, I = $]-\infty;\frac{1}{2}[$ f) $m: x \mapsto x\sqrt{1+x^2}$, I = IR .

Solution

a) Posons $u(x) = 1+x^2$ donc $u'(x) = 2x$. On obtient : $f(x) = \frac{1}{2}\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ donc la fonction F définiesur IR par $F(x) = \frac{1}{2}\times 2\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+x^2}$ est une primitive de f sur IR.

b) Posons $u(x) = 2x+1$ donc $u'(x) = 2$.On obtient :$g(x) = u'(x)[u(x)]^{14}$ donc la fonction G définie sur IR par $G(x) = \frac{1}{15}(2x+1)^{15}$est une primitive de g sur IR.

c) Posons $u(x) = 1+\cos x$ donc $u'(x) = -\sin x$. On obtient : $h(x) = -\frac{u'(x)}{(u(x))^3}$, donc la fonction H définie sur $]0;\pi[$ par $H(x) = \frac{1}{2(1+\cos x)^2}$ est une primitive de h sur $]0;\pi[$.

d)Posons $u(x) = x^3$ donc $u'(x) = 3x^2$.On obtient : $k(x) = \frac{1}{3}u'(x)\sin(u(x))$ donc la fonction K définie sur IR par K(x) = $-\frac{1}{3}\cos(x^3)$ est une primitive de k sur IR.

e) En posant $u(x) = 2x-1$ donc $u'(x) = 2$. On obtient : $l(x) = \frac{1}{2}\frac{u\prime(x)}{u^3(x)}$

La fonction L définie par : $L(x) = \frac{1}{2}\times\frac{-1}{2u^2(x)} = \frac{-1}{4(2x-1)^2}$ est une primitive de l sur $]-\infty;\frac{1}{2}[$.

f) En posant $u(x) = x^2+1$ donc $u'(x) = 2x$. On obtient : $m(x) = \frac{1}{2}u'(x)u(x)^{\frac{1}{2}}$.

La fonction M définie par $M(x) = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}u(x)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} = \frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}$ est une primitive de m sur IR.

Exercice résolu 6

f est définie sur]-∞; 0[par : $f(x) = \frac{3x^2-4x+1}{(2x^2-x)^2}$.

1. Déterminer les nombres réels a et b tels que :$\forall x \in]-\infty;0[, f(x) = \frac{a}{x^2}+\frac{b}{(2x-1)^2}$.

2. Déterminer la primitive F de f sur]-∞; 0[qui s'annule en -1.

Solution

$1. \forall x \in]-\infty;0[, \frac{a}{x^2}+\frac{b}{(2x-1)^2} = \frac{a(2x-1)^2+bx^2}{x^2(2x-1)^2} = \frac{(4a+b)x^2-4ax+a}{(2x^2-x)^2}$.

$\forall x \in]-\infty;0[, f(x) = \frac{a}{x^2}+\frac{b}{(2x-1)^2} \Leftrightarrow \frac{3x^2-4x+1}{(2x^2-x)^2} = \frac{(4a+b)x^2-4ax+a}{(2x^2-x)^2}$

$\Leftrightarrow 3x^2-4x+1 = (4a+b)x^2-4ax+a$

D'où par identification : $4a+b = 3$; $-4a = -4$ et $a = 1$, soit $a = 1$ et $b = -1$.

Ainsi $\forall x \in]-\infty;0[, f(x) = \frac{1}{x^2}-\frac{1}{(2x-1)^2}$

2. En posant $u(x) = 2x-1$, on a $u'(x) = 2$ et $f(x) = \frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}\frac{u'(x)}{u^2(x)}$.

Les primitives de f sur $]-\infty;0[$ sont les fonctions $x \mapsto -\frac{1}{x}+\frac{1}{2(2x-1)}+k$, $k \in IR$
F étant la primitive de f sur $]-\infty;0[$ qui s'annule en -1, on a :
$F(x)=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2(2x-1)}+k$ *et* $F(-1)=0$. *De la condition* $F(-1)=0$ *on tire* $k=-\frac{5}{6}$.
Donc F est définie sur $]-\infty;0[$ *par* $F(x)=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2(2x-1)}-\frac{5}{6}$.

EXERCICES

1 f est une fonction dérivable sur l'intervalle I.
Dans chacun des cas suivants , calculer $f'(x)$ pour tout x de I.
a) $f(x) = -3x^3+4x^2-7x+2$, I=IR;
b) $f(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+1$, I = IR;
c) $f(x)=3x-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{7}{x^3}, I=]0;+\infty[$;
d) $f(x)=2x^2\sqrt{x}, I=]0;+\infty[$;
e) $f(x)=\frac{2x-3}{x+1}, I=]-\infty;-1[$;
f)* $f(x)=(x^2-3x+1)^5$, I= IR ;
g) * $f(x)=\sqrt{4x-1}, I=\left]\frac{1}{4};+\infty\right[$;
i) $f(x)=\frac{2}{(x-1)^2}, I=]1;+\infty[$;
j) $f(x)=\sqrt{x^2-3x+5}$, I=IR;
k) $f(x)=\frac{2}{\sqrt{3x+1}}, I=\left]\frac{-1}{3};+\infty\right[$;
l) $f(x)=\cos 2x$, I= IR;
m) * $f(x)=\frac{2}{(1-2x)^2}, I=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$;
n) * $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, I=IR;
o) $f(x)=x^3(1-x)^2$, I=IR;
p) $f(x)=\sin x\cos^3 x$, I=IR;
r) $f(x)=\frac{x}{2}+1-\frac{2}{(x-1)^2}, I=]-\infty;1[$.

2 f est la fonction définie sur IR par :
$$\begin{cases} f(x)=1-x^2 & \text{si } x \in]-\infty;-1[\\ f(x)=\dfrac{2x+2}{x+2} & \text{si } x \in [-1;+\infty[\end{cases}$$
1. Etudier la continuité de *f* en -1.
2. Etudier la dérivabilité de *f* en –1.

3 f est la fonction définie sur $]-\infty;-2] \cup [1;+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x^2+x-2}$
Etudier la dérivabilité de f en -2 et en 1.

Dans les exercices qui suivent, On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J).

4 Soit f est la fonction définie sur IR par :
$f(x) = x|x-3|+2$.
1. Etudier la continuité de f en 3.
2. Etudier la dérivabilité de f en 3. Interpréter graphiquement le résultat.
3. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
4. Tracer (C).

5 f est la fonction définie sur $[0;+\infty[$par :$f(x) = x^2 - 2\sqrt{x}$.
1. Etudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter graphiquement le résultat.
2. Calculer les limites de $f(x)$ et $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$ puis interpréter graphiquement les résultats.
3. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
4. Tracer (C).

6 f est la fonction de IR vers IR définie par: $f(x)=\frac{x}{|x|+1}$
1. Préciser l'ensemble de définition de f
2. Etudier la continuité de f en 0.
3. Démontrer que (C) admet au point d'abscisse 0 une tangente dont on précisera une équation.
4. Etudier la parité de *f* et en donner une conséquence graphique.
5. Calculer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.
6. Etudier les variations de f sur $[0 ; +\infty[$ et dresser le tableau de variation de f.
7. Tracer la courbe (C).

7 f est la fonction définie sur IR-{-1} par :
$f(x)=\frac{x^2+|x-2|}{x+1}$
1. Etudier la continuité de *f* en 2.
2. Etudier la dérivabilité de f en 2.
Interpréter graphiquement les résultats.
3. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
4. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

5.a) Démontrer que les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $y = x - 2$ et $y = x$ sont asymptotes à (C) respectivement en -∞ et en + ∞ .
b) Etudier la position de (C) par rapport à (D_1) sur $]-\infty;-1[\cup]-1;2]$.
c) Etudier la position de (C) par rapport à (D_2) sur $[2;+\infty[$.
6. Tracer (D_1), (D_2) et (C).

8 f est la fonction de IR vers IR définie par : $f(x) = \sqrt{x^2+3x+2}$.

Partie A

1. Justifier que l'ensemble de définition de f est $]-\infty;-2]\cup[-1;+\infty[$.
2.Etudier la dérivabilité de f en -1 et en -2 puis interpréter graphiquement les résultats.
3. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
4. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
5. Démontrer que les droites (D_1) : $y = -x - \frac{3}{2}$ et (D_2) : $y = x + \frac{3}{2}$ sont asymptotes à (C) respectivement en $-\infty$ et en + ∞ .
6. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $x = -\frac{3}{2}$ est un axe de symétrie de (C).
7. Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
8. Tracer (D_1), (D_2),(T) et (C).

Partie B

Soit g la restriction de f à [-1 ; +∞ [.
1. Démontrer que g est une bijection de [-1 ; +∞ [sur [0 ; +∞ [.
2. Justifier que la bijection réciproque g^{-1} de g est dérivable en $\sqrt{2}$ et calculer $(g^{-1})'(\sqrt{2})$.

9 f est la fonction sur définie sur IR par : $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
1. Démontrer que f est une bijection de IR sur un intervalle K que l'on précisera.
2. Justifier que la bijection réciproque f^{-1} de f est dérivable en 1 et calculer $(f^{-1})'(1)$.
3. a)Tracer (C).
b)Tracer (C') la courbe représentative de f^{-1}.

10 f est la fonction définie sur [0 ; 1] par : $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$.
On prendra pour unité graphique10 cm.
1. Etudier la dérivabilité de f en 0.
Interpréter graphiquement le résultat.
2. Démontrer que f est une bijection de [0 ;1] sur [0 ; 1]
3. Démontrer que pour tout $x \in [0 ; 1]$, $f \circ f(x) = x$.
En déduire la bijection réciproque de f.
4. Construire (C).

11 f est la fonction de IR vers IR définie par : $f(x) = (2-x)\sqrt{4-x^2}$.
L'unité graphique est 2cm.
1. Etudier la dérivabilité de f en -2 et en 2 puis interpréter graphiquement les résultats.
2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3. Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
4. Tracer (T) et (C).

12 f est la fonction définie sur IR par : $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.
1. Calculer la limite de f en +∞.
Interpréter graphiquement le résultat.
2. Calculer la limite de f en $-\infty$.
3.a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -2x$ est asymptote à (C) en $-\infty$.
b) Etudier la position de (C) par rapport à (D).
4. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
5. Tracer (D) et (C).

13 f est la fonction définie sur $]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$ par : $f(x) = -\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

Partie A

g est la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par : $g(x) = 2 - x^2\sqrt{x^2-1}$
1. Calculer la limite de g en +∞ .
2. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
3.a)Démontrer que l'équation $x \in]1;+\infty[, g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $1 < \alpha < 2$.
b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
4. Justifier que :
$\begin{cases} \forall x \in]1;\alpha[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha;+\infty[, g(x) < 0 \end{cases}$

Partie B

1. Etudier la parité de f.
2.a) Calculer la limite de f en +∞.
b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -\frac{x}{2} + 1$ est asymptote à (C) en +∞ .
c) Etudier la position de (C) par rapport à (D)

sur $]1;+\infty[$.
3. Etudier la dérivabilité de f en 1 puis interpréter graphiquement le résultat.
4.a) Démontrer que : $\forall\, x \in]1;+\infty[$,
$f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x^2\sqrt{x^2-1}}$
b) Dresser le tableau de variation de *f*.
5. Démontrer que : $f(\alpha) = -\frac{\alpha}{2} + \frac{2}{\alpha^3}$.
6. Tracer (C) et (D).

14 Dans chacun des cas suivants déterminer une primitive de f sur l'intervalle I.

a)$f(x) = \frac{x^3}{3} + 4x^2 - x + 3,\ I = IR$;

$b)\quad f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{6}{x^4} - \dfrac{3}{\sqrt{x}}$,
$I =]0;+\infty[$;

c) $f(x) = (x-1)(x+2)^2,\ I = \text{IR};$

$d)f(x) = \frac{x^3-2}{x^5}$, $I =]0;+\infty[$;

$e)\ f(x) = \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt{x}$, $I =]0;+\infty[$;

f) $f(x) = -2\sin x + \cos x$, $I = IR$;

g)$f(x) = \tan^2 x$, $I =]0;\frac{\pi}{2}[$.

15 Dans chacun des cas suivants, démontrer que F est une primitive de f sur l'intervalle I.

a)$f(x) = 3x^2 - 1$;
$F(x) = (x-2)(x^2+2x+3)$, I = IR.

b) $f(x) = x(5\sqrt{x}+4)$;
$F(x) = 2x^2\left(\sqrt{x}+1\right), I =]0;+\infty[$.

16 Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de f sur l'intervalle considéré.

a) $* f(x) = 3x^2(x^3-1)^4$, surIR ;

$b) * f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, sur $]1;+\infty[$;

c)$* f(x) = (4x+1)^3$, sur IR ;

$d) * f(x) = \frac{x}{(1-x^2)^4}$, sur $]-1;1[$;

$e) * f(x) = \frac{5}{(4x+1)^3}$, sur $]0;+\infty[$;

f)$* f(x) = 3\sin 2x + \cos(x-1)$, sur IR ;

$g) * f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, sur IR;

$h) f(x) = x - 1 + \frac{2}{(1-x)^3}$, sur$]-\infty;1[$;

$i) * f(x) = \cos x \sin^2 x$, sur IR ;

j) $* f(x) = x\sin(x^2)$, sur IR ;

$k) * f(x) = \frac{3\sin x}{\sqrt{6-2\cos x}}$, sur IR ;

$l)\ f(x) = \frac{\sin x}{(\cos x)^2}$, sur $[0;\pi]$;

m)$f(x) = x\sqrt{x^2+1}$, sur IR ;

n)$f(x) = 3\cos(2x-3)$, sur IR.

17 Soit f définie sur $]1;+\infty[$ par :
$f(x) = \frac{x^2+2x}{(x-1)^2}$.
1. Justifier que : $\forall\, x \in]1;+\infty[$,
$f(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$.
2. Déterminer les primitives de f sur $]1;+\infty[$.

18 Soit f définie sur $]0;+\infty[$ par :
$f(x) = \frac{-2x^2-1}{x(x^3+x)^2}$.
1. Déterminer les nombres réels a et b tels que :
$\forall\, x \in]0;+\infty[$,
$f(x) = \frac{ax}{(x^2+1)^2} + \frac{b}{x^3}$.
2. Déterminer les primitives de f sur $]0;+\infty[$.

19 Soit f la fonction définie sur $]-\infty;1]$ par :
$f(x) = x\sqrt{1-x}$.
Déterminer les nombres réels a, b et c tels que la fonction F : $x \mapsto (ax^2+bx+c)\sqrt{1-x}$ soit une primitive de f sur $]-\infty;1[$.

3

FONCTION LOGARITHME NEPERIEN ETUDE DE FONCTIONS FAISANT INTERVENIR ln

COURS 44

TRAVAUX PRATIQUES 56

EXERCICES 66

COMMENTAIRES

● **Ce thème** vise à :
- définir et étudier la fonction logarithme népérien;
- mettre en place les primitives des fonctions de la forme $\frac{u'}{u}$.

● **La fonction** logarithme est nouvelle en terminale, son introduction vient compléter et enrichir les fonctions étudiées à ce niveau.
La manière d'introduire la fonction logarithme népérien n'est pas imposée.
Il y'a plusieurs approches possibles :
- approche historique ;
- approche avec la calculatrice ;
- approche avec l'utilisation des propriétés des primitives.

L'usage de la calculatrice renforce les possibilités d'étude de cette notion aussi bien pour effecteur des calculs que pour permettre de conjecturer des résultats.

● **La représentation** graphique de la fonction logarithme népérien doit être connue des élèves car elle permet de retrouver de nombreux résultats (ensemble de définition, signe, limites, valeurs particulières, branches paraboliques).

● **La bijectivité** de la fonction logarithme népérien permet d'introduire le nombre e.
● **Aucune étude** des propriétés de la fonction logarithme décimal ne sera faite mais on l'utilisera dans les exercices.
● **La croissance** ''lente'' de la fonction logarithme (illustration de la branche parabolique) pourra être étayée avec les calculs numériques.
Ce résultat sera réinvesti lors de l'étude des croissances comparées des fonctions logarithme népérien, exponentielles et puissances.

CONTENUS	**CAPACITÉS ATTENDUES**
1. Fonction logarithme népérien - Définition , notation propriétés, représentation graphique - Limites de référence 2. Dérivée du type $lnu\ et\ ln\|u\|$ 3. Primitives de $\frac{u'}{u}$ 4. Logarithme décimal Définition	☞ Résoudre des équations ou inéquation faisant intervenir la fonction logarithme népérien. ☞ Déterminer les primitives d'une fonction du type $\frac{u'}{u}$. ☞ Etant donnée une fonction f faisant intervenir la fonction logarithme : -trouver les limites de f aux bornes de son ensemble de définition ; - étudier les variations de f - représenter graphiquement f.

ACTIVITÉS

1 Découvrir la fonction ln avec une calculatrice.

La calculatrice possède une touche **ln** qui correspond à une fonction inconnue dans les classes antérieures à la Terminale et appelée fonction logarithme népérien du nom de son inventeur l'écossais John Napier ou Neper (1550-1617).

Le but de cette activité est de découvrir quelques-unes des propriétés de cette fonction.

1. Essayer de calculer ln x pour les valeurs suivantes de x :
-5 ; -2 ; -0,7 ; 0 ;0,001 ; 0,2 ; 0,5 ; 1 ; 1,3 ; 2 ; 7 ; 10 ; 100 ; 990 ; 100000 ; 10^9 .

2. Conjecturer :
- l'ensemble de définition de la fonction ln ;
- le sens de variation de la fonction ln ;
- les solutions des inéquations : $\ln x < 0$; $\ln x > 0$;
- la limite de la fonction ln en $+\infty$ et en 0.

3.a) A l'aide de la calculatrice, comparer ln5 et $\ln\frac{1}{5}$.
Que peut-on conjecturer ?
b) A l'aide de la calculatrice, comparer $\ln 2 + \ln\sqrt{3}$ et $\ln 2\sqrt{3}$.
Que peut-on conjecturer ?

2 Une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$

1. Justifier que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ admet une seule primitive F sur $]0;+\infty[$ et qui s'annule en 1.

2. Soit la fonction ϕ définie sur $]0;+\infty[$ par $\phi(x) = \mathrm{F}(\mathrm{a}x) - \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(\mathrm{a})$ où a est un nombre réel strictement positif.
a) Démontrer que la fonction ϕ est constante.
b) En déduire que $\forall x \in]0;+\infty[, F(\mathrm{a}x) = \mathrm{F}(\mathrm{a}) + \mathrm{F}(x)$.

COURS

I. DEFINITION ET PROPRIETES

1. Définition et notation

On appelle fonction **logarithme népérien**, la primitive sur $]0\ ;\ +\infty[$ de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.
Elle est notée **ln .**

2. Conséquences

■ L'ensemble de définition de ln est $]0\ ;\ +\infty[$ et $\ln 1 = 0$.

■ ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

■ $\forall\ (a\ ;\ b) \in IR_+^* \times IR_+^*,\quad \ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$

■ $\forall\ (a\ ;\ b) \in IR_+^* \times IR_+^*,\quad \ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$

■ $\forall x \in]0\ ;1[,\ \ln x < 0$ et $\forall x \in]1\ ;\ +\infty[\ ,\ln x > 0$.

Exemple

Résoudre dans IR
a) l'équation $\ln(x^2 - 1) = 0$ (E)
b) l'inéquation $\ln(-2x) < 0$ (I).

a) Soit D l'ensemble de validité de l'équation (E).
$x \in D \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0$.
On en déduit que $D =]-\infty\ ;-1[\cup]1\ ;\ +\infty[$.
(E) $\Leftrightarrow x \in D$ *et* $ln(x^2 - 1) = 0$
$\Leftrightarrow x \in D$ *et* $ln(x^2 - 1) = ln1$
$\Leftrightarrow x \in D$ *et* $x^2 - 1 = 1$
$\Leftrightarrow x \in D$ *et* $x^2 = 2$
$\Leftrightarrow x \in D$ *et* $x = -\sqrt{2}$ *ou* $x = \sqrt{2}$
L'ensemble des solutions de (E) est $S = D \cap \{-\sqrt{2};\sqrt{2}\} = \{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$.
b) Soit V l'ensemble de validité de l'équation (I).
$x \in V \Leftrightarrow -2x > 0$.
On en déduit que $V =]-\infty\ ;0[$.
(I) $\Leftrightarrow x \in V$ *et* $ln(-2x) < 0$
$\Leftrightarrow x \in V$ *et* $ln(-2x) < ln1$
$\Leftrightarrow x \in V$ *et* $-2x < 1$
$\Leftrightarrow x \in V$ *et* $x > -\frac{1}{2}$
L'ensemble des solutions de (I) est $S = V \cap \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[= \left]-\frac{1}{2};0\right[$.

3. Propriétés algébriques

Propriété fondamentale

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b, $\mathbf{\ln ab = \ln a + \ln b}$

Conséquences de la propriété fondamentale

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b et tout nombre rationnel r, on a :

$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$; $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$; $\ln(a^r) = r\ln a$

Remarques : Si a et b sont deux nombres réels non nuls tels que $ab > 0$, alors :

- $\ln(ab) = \ln|a| + \ln|b|$;
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln|a| - \ln|b|$.

Exemple 1

Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln 3$ et $\ln 5$:

$\ln 15$; $\ln 45$; $\ln\frac{25}{3}$; $\ln(75\sqrt{5})$.

ln15 = ln(3×5) = ln3 + ln5 ;

ln45 = ln(3^2×5) = ln(3^2) + ln(5) = 2ln3 + ln5 ;

$ln\frac{25}{3} = ln25 - ln3 = 2ln5 - ln3;$

$ln(75\sqrt{5}) = ln(75) + ln(\sqrt{5}) = ln(3\times5^2) + ln(5^{\frac{1}{2}}) = ln3 + \frac{5}{2}ln5$.

Exemple 2

Résoudre dans IR l'équation (E) : $\ln(2x) - \ln(3-x) = 2\ln(3x-4)$.

Soit D l'ensemble de validité de (E).

$D = \{x \in IR,\ 2x > 0\ et\ 3-x > 0\ et\ 3x-4 > 0\}$.

Donc $D = \left]\frac{4}{3}; 3\right[$.

(E) $\Leftrightarrow x \in D$ *et ln(2x) – ln(3-x) = 2ln(3x-4)*

(E) $\Leftrightarrow x \in D$ *et* $ln\left(\frac{2x}{3-x}\right) = ln(3x-4)^2$

(E) $\Leftrightarrow x \in D$ *et* $\left(\frac{2x}{3-x}\right) = (3x-4)^2$

(E) $\Leftrightarrow x \in D$ *et* $-9x^3 + 51x^2 - 90x + 48 = 0$

On vérifie que 1 est une solution de $x \in IR, -9x^3 + 51x^2 - 90x + 48 = 0$.

On trouve après factorisation que les solution de l'équation $x \in IR, -9x^3 + 51x^2 - 90x + 48 = 0$ *sont : 1 ; 2 ;* $\frac{8}{3}$.

$1 \notin D$ *et* $2 \in D$ *et* $\frac{8}{3} \in D$.

Finalement, l'ensemble des solution de (E) est $\left\{2; \frac{8}{3}\right\}$..

Exercices

1. Soit a > 0 et b > 0. Exprimer en fonction de $\ln a$ et $\ln b$ le nombre $\ln\left(\frac{1}{\sqrt[5]{a^3 b}}\right)$.

2. Démontrer que $\ln\left(2+\sqrt{3}\right)+\ln\left(2-\sqrt{3}\right)=0$

3. Dans chacun des cas suivants , comparer sans calculatrice les nombres x et y

a) $x=\ln 3$ et $y=\ln 2$; **b)** $x=\ln 5$ et $y=\ln 2+\ln 3$; **c)** $x=2\ln 3$ et $y=3\ln 2$

4. Soit a et b les nombres réels définis par :

$a=\ln 567-\ln 72-\ln\frac{7}{8}+\ln\frac{1}{27}$ et $b=\ln\sqrt{135}+\ln\sqrt{75}-\ln\sqrt{15}-\ln\sqrt{27}$

Montrer que $a=-\ln 3$ et que $b=\ln 5$.

Exercice

Résoudre dans IR

a) l'équation (E) : $\ln(2x\text{-}3)+\ln(x+1)=\ln(x^2+9)$.

b) l'inéquation (I) : $\ln(2\,x)-\ln(3-x)<2\ln(3\,x-4)$.

II. LIMITES DE REFERENCE

Propriétés

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$	ii) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\ln x=-\infty$
iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$	iv) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}x\ln x=0$
v) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1$	vi) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

Exercice

Calculer les limites :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)$;

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(x-\ln x)$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{x}+lnx)$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}+lnx)$;

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(x^2-3x+5)$;

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}ln(x^2+1)-\ln(3x^2+x-1)$;

g) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2-1}$;

h) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x}$;

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}xln(\frac{x+1}{x})$;

j) $\lim\limits_{x\to 0}xln(\frac{x+1}{x})$.

III. REPRESENTATION GRAPHIQUE DE LA FONCTION : $x \longmapsto \ln x$

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I,J). On note (C) la courbe représentative de la fonction ln dans le plan muni du repère (O,I,J).

1. Tableau de variation

x	0		$+\infty$
$(\ln)'(x)$	‖	+	
$\ln(x)$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2. Asymptote et branche parabolique

$On\ a\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x = -\infty\ donc\ la\ droite\ (OJ) est\ asymptote\ à (C)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty\ et\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0\ \ donc\ (C)\ admet\ en + \infty$ une branche parabolique de direction (OI).

3. Bijectivité – Nombre réel e

Propriété 1

La fonction ln est une bijection de]0 ;+∞[sur IR.

Propriété 2

Il existe un unique nombre réel noté e tel que lne = 1.

Une valeur approchée de e à 10^{-3} près est 2,718.

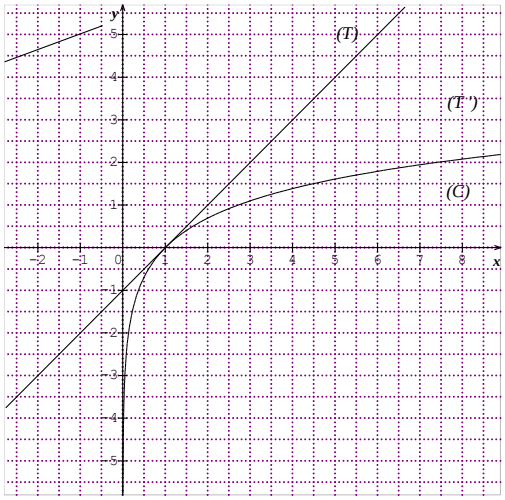
4. Représentation graphique

■ Tangentes particulières

Une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1 est : $y = x - 1$.

Une équation de la tangente (T') à (C) au point d'abscisse e est : $y = \frac{x}{e}$.

■ Représentation graphique



Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x(1-lnx), si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

1. Etudier la continuité de f en 0.
2. Etudier la dérivabilité de f en 0.
Interpréter graphiquement ce résultat.
3. Calculer la limite de f en $+\infty$.
4. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
5. Tracer la courbe représentative (C) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J).

Exercice 2

Soit f la fonction de IR vers IR définie par : $f(x) = \frac{-1+2lnx}{x^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
Interpréter graphiquement ces résultats.
3. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
4. Tracer la courbe représentative (C) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J) d'unité graphique 2 cm.

IV. EXEMPLES D'ÉQUATIONS ET D'INÉQUATIONS

Remarque : Pour tout nombre rationnel r on a : $r = \ln e^r$.

1. Exemples d'équations

Résoudre dans IR les équations suivantes :
(E_1): $2\ln x - 3 = 0$; (E_2) : $(\ln x)^2 - 5\ln x - 6 = 0$

Solution

Résolution de (E_1) : *L'ensemble de validité D_1 de l'équation (E_1) est $D_1 =]0\ ;\ +\infty[$*

Soit $x \in]0\ ;\ +\infty[$, $2ln\ x - 3 = 0 \Leftrightarrow ln\ x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow ln\ x = ln\ e^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}}$. $Et\ comme\ e^{\frac{3}{2}} \in]0\ ;\ +\infty[$ $, alors\ l'ensemble\ des\ solutions\ de\ (E_1)\ est\ \left\{e^{\frac{3}{2}}\right\}$.

Résolution de (E_2) : *L'ensemble de validité D_2 de l'équation (E_2) est $D_2 =]0\ ;\ +\infty[$.*

Vu la forme de l'équation, il convient d'effectuer le changement de variable $X = \ln x$ *; On obtient alors* $X^2 - 5X - 6 = 0$, *soit* $X = -1$ *ou* $X = 6$. *Par suite l'équation* (E_2) *équivaut à :*
$\ln x = -1$ *ou* $\ln x = 6$, *soit* $x = e^{-1}$ *ou* $x = e^6$.
Et comme e^{-1} *et* e^6 *appartiennent à* $]0\,;\,+\infty[$ *, alors l'ensemble des solutions de* (E_2) *est* $\{e^{-1}\,;\,e^6\}$

2. Exemples d'inéquations

Résoudre dans IR chacune des inéquations suivantes :
(I_1) : $\ln x + 1 < 0$ **;** **(I_2) :** $(3 - \ln x)(\ln x + 2) \leq 0$ **;** **(I_3) :** $(\ln x)^2 - 5\ln x - 6 > 0$

Solution
Résolution de (I_1) : $\boldsymbol{\ln x + 1 < 0}$
L'ensemble de validité D_1 *de (I_1) est* $D_1 =]0\,;\,+\infty[$
Soit $x \in]0\,;\,+\infty[$,
$\ln x + 1 < 0 \Leftrightarrow \ln x < -1 \Leftrightarrow \ln x < \ln e^{-1} \Leftrightarrow 0 < x < e^{-1}$.
L'ensemble des solutions de (I_1) est donc $]0\,;\,e^{-1}[$.
Résolution de (I_2) : $\boldsymbol{(3 - \ln x)(\ln x + 2) \leq 0}$
L'ensemble de validité D_2 *de (I_2) est* $D_2 = \{x \in IR / x > 0\} =]0\,;\,+\infty[$.
Soit $x \in]0\,;\,+\infty[$.
$(3 - \ln x)(\ln x + 2) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 3$ *ou* $\ln x = -2 \Leftrightarrow x = e^3$ *ou* $x = e^{-2}$
Soit $x \in]0\,;\,+\infty[$,
$3 - \ln x < 0 \Leftrightarrow -\ln x < -3$
$\Leftrightarrow \ln x > 3$
$\Leftrightarrow x > e^3$

Soit $x \in]0\,;\,+\infty[$,
$\ln x + 2 < 0 \Leftrightarrow \ln x < -2$
$\Leftrightarrow 0 < x < e^{-2}$
D'où le tableau suivant :

x	0		e^{-2}		e^3	$+\infty$
$3 - \ln x$	‖	$+$		$+$	0	$-$
$\ln x + 2$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$
$(3 - \ln x)(\ln x + 2)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_2) *est* $]0\,;\,e^{-2}] \cup [e^3\,;\,+\infty[$

NB : Il est important de noter que dans cette méthode, l'omission de l'étude locale des signes des différents facteurs invalide le tableau de signe.

Résolution de (I_3) : $\boldsymbol{(\ln x)^2 - 5\ln x - 6 > 0}$ ***:***
L'ensemble de validité D_3 *de (I_3) est* $D_3 = \{x \in IR / x > 0\} =]0\,;\,+\infty[$
Vu la forme de l'inéquation, il convient d'effectuer le changement de variable $X = \ln x$ *, alors on obtient l'inéquation*
$X \in IR$, $X^2 - 5X - 6 > 0$.
Le polynôme du second degré $X^2 - 5X - 6$ *ayant pour racines* -1 *et* 6 *, il vient :*
$X^2 - 5X - 6 > 0 \Leftrightarrow X \in]-\infty\,;\,-1[\cup]6\,;\,+\infty[$ *(règle du signe d'un polynôme du second dedré)*
Par suite, pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, $(\ln x)^2 - 5\ln x - 6 > 0 \Leftrightarrow \ln x \in]-\infty\,;\,-1[\cup]6\,;\,+\infty[$
$\Leftrightarrow \ln x < -1$ *ou* $\ln x > 6$
$\Leftrightarrow 0 < x < e^{-1}$ *ou* $x > e^6$

D'où, l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_3) est $]0;e^{-1}[\cup]e^{6};+\infty[$

3. Exemples de systèmes

Résoudre dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ chacun des systèmes suivants :

1. $\begin{cases}2\ln x-2\ln y=-2\\3\ln x+\ln y=5\end{cases}$ 2. $\begin{cases}x+y=7\\\ln x+\ln y=12\end{cases}$ 3. $\begin{cases}(\ln x)(\ln y)=11\\\ln(xy)=-12\end{cases}$

Solution

1. Résolution de $\begin{cases}2\ln x-2\ln y=-2\\3\ln x+\ln y=5\end{cases}$

Ensemble de validité Ev :

$Ev=\{(x;y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}/x>0\ et\ y>0\}$

$Ev=]0;+\infty[\times]0;+\infty[$

Pour tout $(x;y)\in]0;+\infty[\times]0;+\infty[$, *en posant* $X=lnx$ *et* $Y=lny$, $t\begin{cases}2\ln x-2\ln y=-2\\3\ln x+\ln y=5\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}2X-2Y=-2\\3X+Y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}X=1\\Y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\ln x=1\\\ln y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=e\\y=e^2\end{cases}$

$e\in]0;+\infty[$ *et* $e^5\in]0;+\infty[$ *alors l'ensemble des solutions du système est* $S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}=\{(e;e^2)\}$.

Remarque *: Le système peut être résolu sans changement de variable*

2. Résolution de $\begin{cases}x+y=7\\\ln x+\ln y=12\end{cases}$

Ensemble de validité

$Ev=\{(x;y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}/x>0\ et\ y>0\}=]0;+\infty[\times]0;+\infty[$

$\begin{cases}x+y=7\\\ln x+\ln y=\ln 12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=7\\\ln xy=\ln 12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=7\\xy=12\end{cases}$

Si x et y existent alors ils sont les solutions de l'équation : $X\in]0;+\infty[$, $X^2-7X+12=0$

$X\in]0;+\infty[$, $X^2-7X+12=0\Leftrightarrow X=4\ ou\ X=3$

Les couples solutions du système sont donc (4 ; 3) et (3 ; 4). $S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}=\{(4;3);(3;4)\}$.

3. Résolution de $\begin{cases}(\ln x)(\ln y)=11\\\ln(xy)=-12\end{cases}$

Ensemble de validité

$Ev=\{(x;y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}/x>0\ et\ y>0\ et\ xy>0\}=]0;+\infty[\times]0;+\infty[$

$\begin{cases}(\ln x)(\ln y)=11\\\ln(xy)=-12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(\ln x)(\ln y)=11\\\ln x+\ln y=-12\end{cases}$

Si lnx et lny existent alors ils sont les solutions de l'équation : $X\in\mathbb{R}$, $X^2+12X+11=0$

-1 et -11 sont les solutions de l'équation $X^2+12X+11=0$

Le système équivaut à $\begin{cases} lnx = -1 \\ lny = -11 \end{cases}$ *ou* $\begin{cases} lnx = -11 \\ lny = -1 \end{cases}$, *soit* $\begin{cases} x = e^{-1} \\ y = e^{-11} \end{cases}$ *ou* $\begin{cases} x = e^{-11} \\ y = e^{-1} \end{cases}$

Les couples solutions sont $(e^{-1} ; e^{-11})$ *et* $(e^{-11} ; e^{-1})$. $S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{(e^{-1} ; e^{-11}) ; (e^{-11} ; e^{-1})\}$.

V. FONCTIONS DU TYPE $\ln \circ u$ ou $\ln \circ |u|$

1. Dérivées

Propriété

i) Si $\boldsymbol{u}$ est une fonction dérivable sur un intervalle I, telle que pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbf{I}$, $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) > 0$, alors la fonction $\ln \circ \boldsymbol{u}$est dérivable sur I. Dans ce cas, on a : $(\ln \circ \boldsymbol{u})' = \frac{\boldsymbol{u'}}{\boldsymbol{u}}$

ii) Si $\boldsymbol{u}$ est une fonction dérivable sur un intervalle I, telle que pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbf{I}$, $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \neq \mathbf{0}$, alors $\ln \circ |\boldsymbol{u}|$est dérivable sur I. Dans ce cas, on a : $(\ln \circ |\boldsymbol{u}|)' = \dfrac{\boldsymbol{u'}}{\boldsymbol{u}}$

NB : *La formule de la dérivée est la même pour* $ln \circ u \;\; et \;\; ln \circ |u|$ *, seul l'ensemble de définition est éventuellement différent de l'une des fonctions à l'autre.*

Exemple

Dans chacun des cas suivants, on admet que la fonction f de IR vers IR est dérivable sur chaque intervalle de son ensemble de définition.

Déterminer l'ensemble D_f de définition de f et calculer la dérivée f' de f :

$a)\ f(x) = \ln(6 - 2x)\,;\quad b)\ f(x) = \ln|(x-2)(3x+1)|$.

Solution

a) $D_f = \{ x \in IR / 6 - 2x > 0 \}$

$6 - 2x > 0 \Leftrightarrow -2x > -6 \Leftrightarrow x < 3$, *d'où* $D_f =]-\infty ; 3[$

Pour tout $x \in]-\infty ; 3[$, $f'(x) = \frac{-2}{6-2x} = \frac{-1}{3-x}$.

b) $D_f = \{ x \in IR / (x-2)(3x+1) \neq 0 \} = IR \setminus \left\{2 ; -\frac{1}{3}\right\}$

Pour tout $x \in IR \setminus \left\{2 ; -\frac{1}{3}\right\}$, $f'(x) = \frac{1(3x+1)+3(x-2)}{(x-2)(3x+1)} = \frac{6x-5}{(x-2)(3x+1)}$

Exercice

Dans chacun des cas suivants, on admet que la fonction f de IR vers IR est dérivable sur chaque intervalle de son ensemble de définition.

Déterminer l'ensemble D_f de définition de f et calculer la dérivée f' de f :

$a)\ f(x) = \ln(-x)\,;\quad b)\ f(x) = \ln|2x+5|\ ;\ c)\ f(x) = \ln\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)$;

$d)\ f(x) = x + 1 - \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}\,;\quad e)\ f(x) = (x-1)\ln(2x+1)\ ;\ f)\ f(x) = \ln(2x-1) - \ln(1+x)$.

2. Primitives

Propriété

Si $\boldsymbol{u}$ est une fonction dérivable sur un intervalle I, telle que pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbf{I}, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \neq \mathbf{0}$,et si u' est continue sur I alors une primitive sur I de la fonction $\frac{\boldsymbol{u'}}{\boldsymbol{u}}$ est la fonction $\mathbf{ln} \circ |\boldsymbol{u}|$ **.**

Exemple

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de f sur l'intervalle I.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$; I = $]-\infty; 0[$

b) $f(x) = \frac{-5}{2x+1}$; I = $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

c) $f(x) = \frac{x^3}{x^4+1}$; I = IR.

a) En posant $u(x) = x \Longrightarrow u'(x) = 1$. *Donc* $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

La fonction F définie sur $]-\infty; 0[$ *par :* $F(x) = \ln|x|$ *est une primitive de* f *sur* $]-\infty; 0[$.

b) En posant $u(x) = 2x + 1 \Longrightarrow u'(x) = 2$. *Donc* $f(x) = -\frac{5}{2}\left(\frac{u'(x)}{u(x)}\right)$.

La fonction F définie sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ *par :* $F(x) = -\frac{5}{2}\ln|2x + 1|$ *est une primitive de* f *sur* $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

d) En posant $u(x) = x^4 + 1 \Longrightarrow u'(x) = 4x^3$. *Donc* $f(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{u'(x)}{u(x)}\right)$.

La fonction F définie sur IR par : $F(x) = \frac{1}{4}\ln(x^4 + 1)$ *est une primitive de* f *sur IR*.

Exercice

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de f sur l'intervalle I.

a) $f(x) = \frac{2x+1}{3x}$; I = $]0; +\infty[$

b) $f(x) = \frac{3}{4-2x}$; I = $]-\infty; 2[$

c) $f(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+3}$; I = IR

d) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$; I = $]-1; 1[$

e) $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{1-x}$; I = $]-\infty; 1[$

f) $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$; I = $]0; +\infty[$.

VI. LOGARITHME DECIMAL

1. Définition

On appelle fonction logarithme décimal la fonction notée **log** définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$\mathbf{log}\, \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{ln}\, \boldsymbol{x}}{\mathbf{ln}\, \mathbf{10}}$$

NB . On a $\mathbf{log\,10 = 1 et log1 = 0}$

2. Propriétés

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b et pour tout nombre rationnel r, on a :

■ $\log(ab) = \log a + \log b$ ■ $\log\frac{1}{b} = -\log b$

■ $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$ ■ $\log a^r = r\log a$

■ $\log a = r \Leftrightarrow a = 10^r$

TRAVAUX PRATIQUES

Exercice résolu 1
Résoudre dans IR les équations proposées :
(E_1): $\ln(x-2)+\ln(x+2)=\ln(x+8)$
(E_2) : $\ln(x^2-4)=\ln(x+8)$.

Solution

■***Résolution de (E_1):*** $\ln(x-2)+\ln(x+2)=\ln(x+8)$
L'ensemble de validité de (E_1) est $D_1=\{x\in IR / x-2>0, x+2>0 \text{ et } x+8>0\}=]2;+\infty[$
Soit $x\in]2;+\infty[$, *on a* :
$\ln(x-2)+\ln(x+2)=\ln(x+8)\Leftrightarrow \ln[(x-2)(x+2)]=\ln(x+8)$
$\Leftrightarrow (x-2)(x+2)=x+8$
$\Leftrightarrow x^2-x-12=0 \Leftrightarrow x=-3$ *ou* $x=4$
$-3\notin]2;+\infty[$ *et* $4\in]2;+\infty[$ *donc l'ensemble des solutions de (E_1) est* $\{4\}$.

■***Résolution de (E_2) :*** $\ln(x^2-4)=\ln(x+8)$
L'ensemble de validité de (E_2) est $D_2=\{x\in IR / x^2-4>0 \text{ et } x+8>0\}$
$x^2-4>0 \Leftrightarrow x\in]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$
$x+8>0 \Leftrightarrow x>-8 \Leftrightarrow x\in]-8;+\infty[$
$D_2=\left(]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[\right)\cap]-8;+\infty[=]-8;-2[\cup]2;+\infty[$
Soit $x\in D_2$,
$\ln(x^2-4)=\ln(x+8)\Leftrightarrow x^2-4=x+8\Leftrightarrow x^2-x-12=0\Leftrightarrow x=-3$ *ou* $x=4$
$-3\in D_2$ *et* $4\in D_2$ *donc l'ensemble des solutions de (E_2) est* $\{-3;4\}$.

Exercice résolu 2
Résoudre dans IR les inéquations suivantes.
a) $\ln(2-3x)\leq 0$
b) $\ln(5-x)+\ln 3>\ln(x-1)$
c) $(1-x)\ln(x-1)>0$

a) *Soit (I_1) :* $x\in IR, \ln(2-3x)\leq 0$.
L'ensemble de validité de (I_1) est $D=\{x\in IR / 2-3x>0\}=]-\infty;\frac{2}{3}[$

Soit $x \in D$,
$\ln(2-3x) \leq 0 \Leftrightarrow \ln(2-3x) \leq \ln(1)$
$\Leftrightarrow 2-3x \leq 1$
$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$
Donc l'ensemble des solutions de (I_1) *est* $]-\infty;\frac{2}{3}[\cap [\frac{1}{3}\ ;\ +\infty[= [\frac{1}{3}\ ;\ \frac{2}{3}[$.

b) *Soit* (I_2) : $x \in IR, \ln(5-x) + \ln 3 > \ln(x-1)$
L'ensemble de validité de (I_2) *est* $D = \{x \in IR / 5-x > 0 \text{ et } x-1 > 0\} =]1;5[$
Soit $x \in D$,
$\ln(5-x) + \ln 3 \geq \ln(x-1) \Leftrightarrow \ln[(5-x)\times 3] \geq \ln(x-1)$
$\Leftrightarrow 15-3x \geq x-1 \Leftrightarrow -4x \geq -16 \Leftrightarrow x \leq 4$
Donc l'ensemble des solutions de (I_2) *est* $]1;5[\cap]-\infty\ ;\ 4] =]1\ ;\ 4]$.

c) *Soit* (I_3) : $x \in IR,\ (3-x)\ln(x-1) > 0$
L'ensemble de validité de (I_2) *est* $D = \{x \in IR / x-1 > 0\} =]1;+\infty[$.
Soit $x \in D$,
• $3-x = 0 \Leftrightarrow x = 3$.
•$\ln(x-1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x-1) = \ln(1)$
$\Leftrightarrow x-1 = 1$
$\Leftrightarrow x = 2$.
•$\ln(x-1) > 0 \Leftrightarrow \ln(x-1) > \ln(1)$
$\Leftrightarrow x-1 > 1$
$\Leftrightarrow x > 2$.

x	*1*		*2*		*3*		$+\infty$
$3-x$		+		+	*0*	-	
$\ln(x-1)$		-	*0*	+		+	
$(3-x)\ln(x-1)$		-	*0*	+	*0*	-	

Donc l'ensemble des solutions de (I_3) *est* $]2;3[$.

Exercice résolu 3
Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de f au bornes de son ensemble de définition D_f .

a) $f(x) = \ln(2x-6)$ b) $f(x) = \dfrac{1-2\ln x}{1-\ln x}$ c) $f(x) = 2x+3-\ln x$

a) $D_f = \{x \in IR / 2x-6 > 0\} =]3;+\infty[$.
• *Posons* $X = 2x-6$; *on a :* $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{X\to 0\\ >}} \ln X = -\infty$.
• *Posons* $X = 2x-6$; *on a :* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$.
b) $D_f = \{x \in IR / x > 0 \text{ et } 1-\ln x \neq 0\}$.
Soit $x \in]0;+\infty[$.
$1-\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1$
$\Leftrightarrow x = e$.
Donc $D_f =]0;e[\cup]e;+\infty[$.

● *Posons* $X = \ln x$; *on a :* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{X\to -\infty} \frac{1-2X}{1-X} = \lim\limits_{X\to -\infty} \frac{-2X}{-X} = \lim\limits_{X\to -\infty} 2 = 2.$

● *Posons* $X = \ln x$; *on a :* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to +\infty} \frac{1-2X}{1-X} = \lim\limits_{X\to +\infty} \frac{-2X}{-X} = \lim\limits_{X\to +\infty} 2 = 2.$

● *Soit* $x \in]0;+\infty[$.

1-$\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1$

$\Leftrightarrow 0 < x < e$.

x	*0*		e		$+\infty$
$1 - lnx$		+	*0*	-	

$\lim\limits_{\substack{x\to e\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to e\\ >}} \frac{1-2\ln x}{1-\ln x} = \lim\limits_{\substack{x\to e\\ >}} (1-2\ln x)\left(\frac{1}{1-\ln x}\right)$

$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to e\\ >}} (1-2\ln x) = -1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to e\\ >}} \left(\frac{1}{1-\ln x}\right) = -\infty \end{cases}$ *donc par produit :* $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ >}} (1-2\ln x)\left(\frac{1}{1-\ln x}\right) = +\infty.$

Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ >}} f(x) = +\infty.$

$\lim\limits_{\substack{x\to e\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to e\\ <}} \frac{1-2\ln x}{1-\ln x} = \lim\limits_{\substack{x\to e\\ <}} (1-2\ln x)\left(\frac{1}{1-\ln x}\right)$

$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to e\\ <}} (1-2\ln x) = -1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to e\\ <}} \left(\frac{1}{1-\ln x}\right) = +\infty \end{cases}$ *donc par produit:* $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ <}} f(x) = -\infty.$

c) $D_f = \{x \in IR \,/\, x > 0\} =]0;+\infty[$.

● *On a :* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (2x + 3 - \ln x).$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln(2x+3) = 3$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x = -\infty$ *donc* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (-\ln x) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} ln(2x+3) = 3$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (-\ln x) = +\infty$ *donc par somme* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (2x + 3 - \ln x) = +\infty.$

Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = +\infty.$

● *On a :* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x\left(2 + \frac{3}{x} - \frac{\ln x}{x}\right).$

$\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty.$

$\lim\limits_{x\to +\infty} (2) = 2$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3}{x} = 0$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{lnx}{x} = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} \left(-\frac{\ln x}{x}\right) = 0.$

Donc par somme, $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(2 + \frac{3}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) = 2.$

On a : $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(2 + \frac{3}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) = 2$ *donc par produit,* $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(2 + \frac{3}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty.$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$

Exercice résolu 4

Partie A

On considère la fonction g dérivable sur]0 ; +∞ [et définie par : $g(x) = 4x^2 - \ln x + 1$.

1. Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

2. a) Montrer que $\forall x \in]0 ; +\infty [$, $g'(x) = \frac{8x^2-1}{x}$.

b) Etudier le signe de g'(x) sur]0 ; +∞ [.

3. Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

4. Démontrer que : $\forall x \in]0 ; +\infty [$, $g(x) > 0$.

Partie B

On considère la fonction *f* dérivable sur]0 ; +∞ [et définie par : $f(x) = \frac{\ln x}{x} + 4x - 2$.

On désigne par (C) la courbe représentative de *f* dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) unité graphique : 2 cm.

1.a) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 4x - 2$ est une asymptote oblique à (C) en +∞.

b) Etudier la position relative de (C) et (D).

3. a) Vérifier que : $\forall x \in]0 ; +\infty [$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

b) En déduire les variations de *f*, puis dresser son tableau de variation.

4. a) Démontrer que l'équation $x \in]0 ; +\infty [$, $f(x) = 0$ admet une unique solution α.

b) Justifier $0{,}65 < \alpha < 0.66$.

5. Donner une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

6. Tracer (T) et (C) .

7. a) Démontrer que f est une bijection de $]0; +\infty[$ sur IR.

On désigne par f^{-1} la bijection réciproque de f et (C') sa courbe représentative dans le plan muni du repère (O , I , J).

b) Quel est le sens de variation de f^{-1}? Justifier.

Calculer $f(1)$.

c) Démontrer que le nombre dérivé de f^{-1} en 2 existe puis le calculer.

d) Construire la courbe (C') et sa tangente (Δ) au point d'abscisse 2.

Solution

Partie A

1.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = +\infty \; car \; \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} (4x^2+1) = 1 \; et \; \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} (-\ln x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x(4x - \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x})$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \, , \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \; et \; \lim_{x\to+\infty} 4x = +\infty \; donc \; \lim_{x\to+\infty} (4x - \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}) = +\infty$$

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

Donc par produit des limites on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

2. a) $\forall x \in]0\,;\,+\infty[,\ g'(x) = 8x - \frac{1}{x} = \frac{8x^2-1}{x}$.

b) $\forall x \in]0\,;\,+\infty[,\ g'(x) = \frac{8x^2-1}{x} = \frac{(\sqrt{8}x+1)(\sqrt{8}x-1)}{x} = \frac{(\sqrt{8}x+1)}{x}(\sqrt{8}x-1)$.

$\forall x \in]0\,;\,+\infty[, \frac{(\sqrt{8}x+1)}{x} > 0$, *donc* $g'(x)$ *a le même signe que* $(\sqrt{8}x-1)$ *sur* $]0\,;\,+\infty[$.

Ainsi :

$g'(\frac{1}{\sqrt{8}}) = 0$,

$\forall x \in]0\,;\,\frac{1}{\sqrt{8}}[, g'(x) < 0$ *et* $\forall x \in]\frac{1}{\sqrt{8}}\,;\,+\infty[\ , g'(x) > 0$.

3. *D'après le signe de* g' *étudié dans la question précédente,*

g *est strictement décroissante sur* $\left]0\,;\,\frac{1}{\sqrt{8}}\right]$ *et strictement croissante sur* $\left[\frac{1}{\sqrt{8}}\,;\,+\infty\right[$.

Tableau de variation de g

x	0		$\frac{1}{\sqrt{8}}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	$+\infty$	$g\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)$		$+\infty$

$g\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln 8$.

4. *D'après l'étude des variations de* g, g *admet sur* $]0\,;\,+\infty[$ *un minimum atteint en* $\frac{1}{\sqrt{8}}$

Ainsi : $\forall x \in]0\,;\,+\infty[, g(x) \geq g\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right) > 0$.

Donc $\forall x \in]0\,;\,+\infty[, g(x) > 0$.

Partie B

1. a) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}(\frac{1}{x}\times\ln x + 4x - 2) = -\infty$ *car* $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} \frac{1}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} \ln x = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to0}(4x-2) = -2$

Interprétation graphique : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x) = -\infty$ *donc la droite (OJ) est une asymptote verticale à (C).*

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *car* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} (4x-2) = +\infty$

2. a) $\forall\, x \in]0\,;\, +\infty[, f(x) - (4x-2) = \dfrac{\ln x}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(4x-2)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ ***d****onc la droite* (D) *est une asymptote à (C) en* $+\infty$.

b) $\forall\, x \in]0\,;\, +\infty[, f(x) - (4x-2) = \dfrac{\ln x}{x}$

Pour tout $x \in]0\,;\, +\infty[,\ x > 0$ *donc* $f(x) - (4x-2)$ *a le même signe que* $\ln x$.
Ainsi :
$\forall x \in]0\,;\, 1[, f(x) - (4x-2) < 0$ *donc (C) est au-dessous de (D) sur* $]0\,;\, 1[$.
$\forall x \in]1\,;\, +\infty[, f(x) - (4x-2) > 0$ *donc (C) est au-dessus de (D) sur* $]1\,;\, +\infty[$.
(C) coupe (D) au point d'abscisse 1.

3. a. $\forall x \in]0\,;\, +\infty[, f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\times x - \ln x}{x^2} + 4 = \dfrac{1-\ln x+4x^2}{x^2} = \dfrac{4x^2-\ln x+1}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$

b) *D'après la partie A,* $\forall\, x \in]0\,;\, +\infty[, g(x) > 0$ *par suite,*
$\forall x \in]0\,;\, +\infty[,\ f'(x) > 0$. *Donc f est strictement croissante sur* $]0\,;\, +\infty[$.
Tableau de variation de f.

x	**0**		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

4. a) • *f est continue et strictement croissante sur* $]0\,;\, +\infty[$ *donc f réalise une bijection de* $]0\,;\, +\infty[$ *sur* $f(]0\,;\, +\infty[) = \mathbb{R}$.
Comme $0 \in \mathbb{R}$, *l'équation* $f(x) = 0$ *admet une solution unique* α *dans* $]0\,;\, +\infty[$.
b) $f(0{,}65) \approx -0{,}06$ *et* $f(0{,}66) \approx 0{,}01$. *Comme* $f(0{,}65) \times f(0{,}66) < 0$ *alors* $0{,}65 < \alpha < 0{,}66$.

5. *Une équation de (T) est :* $y = f'(1)(x-1) + f(1)$, *avec* $f'(1) = 5$ *et* $f(1) = 2$.
Ainsi, (T) : $y = 5(x-1) + 2$
(T) : $y = 5x - 3$.

6. *Constructions (voir graphique)*

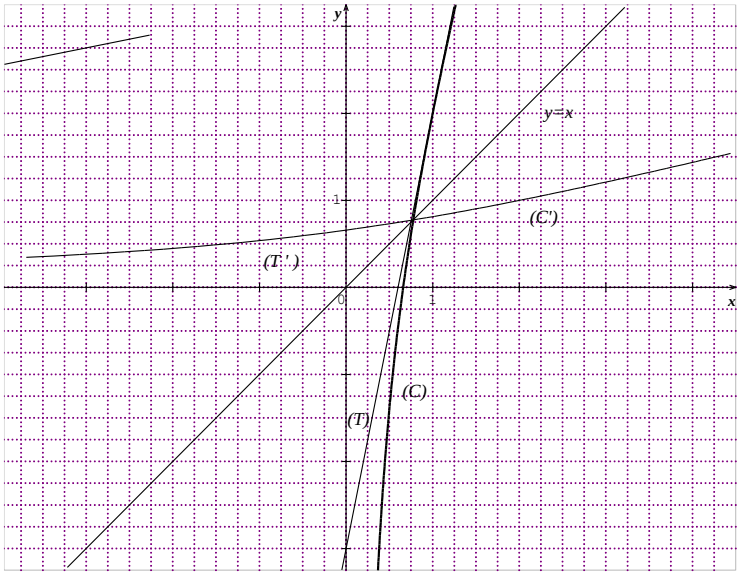
7a) • *f est continue et strictement croissante sur* $]0\,;\, +\infty[$.
• $f(]0\,;\, +\infty[) = \mathbb{R}$.
Donc f est une bijection de $]0\,;\, +\infty[$ *sur* $\mathbb{R}$
b) f^{-1} *et f ont le même sens de variation. Donc* f^{-1} *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.

c) $f(1) = 2$.

d) $f'(1) = 5$; *comme* $f'(1) \neq 0$ *alors* $(f^{-1})'(2)$ *existe et* $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{5}$

e) (C) et (C') sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

(T') est la droite passant par le point $A\binom{2}{1}$ et de vecteur directeur $\vec{v}\left(\frac{1}{\frac{1}{5}}\right)$



Exercice résolu 5

Partie A

On donne la fonction g dérivable sur $]-\infty; 0[$et sur$]0; +\infty[$ et définie par $g(x) = x^2 - 1 + \ln|x|$.

1. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation (On ne calculera pas les limites).

2.a) Calculer $g(-1)$et $g(1)$.

b)Justifier que : $\forall x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[\ g(x) > 0$ et $\forall x \in]-1; 0[\cup]0; 1[\ g(x) < 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$par $f(x) = x + 1 - \dfrac{\ln|x|}{x}$ et (C) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthogonal (O , I , J) .

Unité 2 cm sur (OI) et 1 cm sur (OJ).

1. Calculer les limites de f aux bornes de $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

2. Sachant que f est dérivable sur$]-\infty; 0[$et sur$]0; +\infty[$, vérifier que pour tout x de *IR**, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

3. Dresser le tableau de variation de f .

4.a) Démontrer que la droite (D) d'équation : $y = x + 1$ est une asymptote à (C).

b) Etudier la position de (C) par rapport à la droite (D).

c) Démontrer que le point J est un centre de symétrie de (C).

d) Tracer (C) et (D).

Solution

Partie A

1. *Pour tout* $x \in IR^*$, $g'(x) = \frac{2x^2+1}{x}$.

Pour tout $x \in IR^*$, $2x^2 + 1 > 0$ *donc le signe de* $g'(x)$ *est celui de* x

Ainsi : $\forall x \in]-\infty; 0[, g'(x) < 0$ et $\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) > 0$

Donc g est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ *et strictement croissante sur* $]0; +\infty[$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	||	$+$	
$g(x)$		0	||		0

2.a) $g(-1) = 0$ *et* $g(1) = 0$.

b) D'après l'étude des variations de g , g est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$ *et* $g(-1) = 0$ *:*

$x < -1 \implies g(x) > g(-1)$

$\implies g(x) > 0$

$-1 < x < 0 \implies g(x) < g(-1)$

$\implies g(x) < 0$

Par ailleurs g est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$ et $g(1) = 0$ *:*

$0 < x < 1 \implies g(x) < g(1)$

$\implies g(x) < 0$

$x > 1 \implies g(x) > g(1)$

$\implies g(x) > 0$

En résumé on a : $\forall x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[, g(x) > 0$ *et* $\forall x \in]-1; 0[\cup]0; 1[, g(x) < 0$.

Partie B

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[x + 1 - \frac{\ln|x|}{x} \right] = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[x + 1 - \frac{\ln(-x)}{x} \right]$

Faisons un changement de variable en posant $X = -x$. *Donc* $x = -X$

Quand $x \to -\infty , X \to +\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[-X + 1 + \frac{\ln X}{X} \right] = -\infty \text{ car } \lim_{x \to +\infty} (-X + 1) = -\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left[x + 1 - \frac{1}{x} \ln(-x) \right]$$

$$On\ a \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} (x + 1) = 1$$

$$On\ a \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left[-\frac{1}{x} \ln(-x) \right] = \lim_{\substack{X \to 0 \\ >}} \left[\frac{1}{X} \ln(X) \right] = -\infty\ car \lim_{\substack{X \to 0 \\ >}} \frac{1}{X} = +\infty\ et \lim_{\substack{X \to 0 \\ >}} \ln X = -\infty$$

$$Donc \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left[x + 1 - \frac{1}{x} \ln x \right]$$

$$On\ a \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} (x + 1) = 1$$

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left[-\frac{1}{x}\ln x\right]=+\infty$ *car* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(-\frac{1}{x}\right)=-\infty$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\ln x=-\infty$

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x+1-\frac{\ln|x|}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x+1-\frac{\ln x}{x}\right]=+\infty \text{ car } \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0\end{cases}$$

2.*Pour tout* $x\in IR^*$, $f'(x)=1-\frac{\frac{1}{x}x-\ln|x|}{x^2}=\frac{x^2-1+\ln|x|}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$

3.*Pour tout* $x\in IR^*$, $x^2>0$ *, donc* $f'(x)$ *a le signe de* $g(x)$
Ainsi d'après la question 3-b de la partie A , il vient :

$\forall x\in\,]-\infty;-1[\cup\,]1;+\infty[, f'(x)>0$ et $\forall x\in\,]-1;0[\cup\,]0;1[\,, f'(x)<0$
Dressons le tableau de variation

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

4a)

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim_{x\to-\infty}-\frac{\ln|x|}{x}=\lim_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X}=0 \text{ avec } X=-x$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim_{x\to-\infty}-\frac{\ln x}{x}=0$$

D'où la droite (D) *est une asymptote oblique à* (C).

b) **P**our tout $x\in IR^*$, *on a* $f(x)-(x+1)=-\frac{\ln|x|}{x}=\frac{\ln|x|}{-x}$.

$\ln|x|=0 \Leftrightarrow |x|=1 \Leftrightarrow x=-1$ *ou* $x=1$
$\ln|x|<0 \Leftrightarrow x\neq 0$ *et* $|x|<1 \Leftrightarrow x\neq 0$ *et* $-1<x<1$

D'où le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$-x$		$+$		$+$	‖	$-$		$-$	
$\ln\lvert x\rvert$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)-(x+1)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	

On en déduit :
- (C) *est au- dessus de* (D) *sur* $]-\infty;-1[\cup\,]0;1[$.

• (C) *est au-dessous de* (D) *sur* $]-1;0[\cup]1;+\infty[$.

• (C) *et* (D) *se coupent aux points d'abscisses – 1 et 1.*

c) *Un point* $\Omega(a\,;b)$ *est centre de symétrie de (C) si et seulement si :*
Pour tout $x \in D_f$ *, on a* $2a - x \in D_f$ *et* $f(x) + f(2a - x) = 2b$
Pour le point J (0 ;1) , on a : a = 0 et b = 1
$2a - x = -x.$
$x \in IR^* \Rightarrow x \neq 0$
$\Rightarrow -x \neq 0$

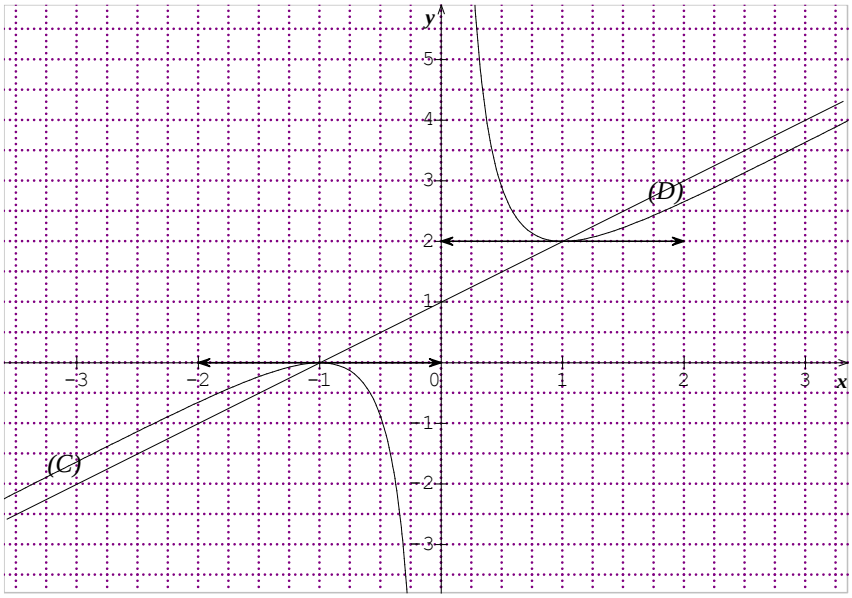
$\Rightarrow -x \in IR^*$ *(3)*

Pour tout $x \in IR^*, f(-x) + f(x) = (-x) + 1 - \dfrac{\ln|-x|}{(-x)} + x + 1 - \dfrac{\ln|x|}{x}$

$$= 2 + \frac{\ln|x|}{x} - \frac{\ln|x|}{x}$$
$$= 2 = 2 \times 1 \qquad (4)$$

De (3) et (4) on déduit que J est centre de symétrie de (C).

d) Représentation graphique de (C) , (D)



EXERCICES

1 Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f de IR vers IR définie par :

a) $f(x) = \ln(x-2)$

b) $f(x) = \ln(x-2) + \ln(9-2x)$

c) $f(x) = \ln[(x-2)(2x-9)]$

d) $f(x) = \ln(x-2) + \ln(2x-9)$

e) $f(x) = \ln|x-2|$

f) $f(x) = \ln\left(\frac{1-2x}{x}\right)$

g) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-3}\right)$

h) $f(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-3}\right|$

i) $f(x) = \frac{2}{1-\ln x}$

j) $f(x) = 1 + 2x - \frac{\ln x}{x-1}$.

2 Résoudre dans IR, chacune des équations proposées.

a) $\ln(1-3x) = 0$

b) $\ln(x^2+x+1) = 0$

c) $\ln(x^2+3x) = \ln(2x+2)$

d) $\ln(-3x) = \ln(x^2-4)$

e) $\ln(2x^2-3) = ln2 + \ln(x-1)$

f) $2\ln x = \ln(2x^2+8x)$

g) $2\ln(x+1) = \ln(x-1) + \ln(x+3)$

h) $\ln x - 2\ln(x+2) = 0$

i) $\ln\frac{2x-3}{x-1} = \ln(x+2)$

j) $-\ln|x+1| = 0$.

3 Résoudre dans *IR* chacune des inéquations proposées :

a) $\ln(-x) \geq 0$

b) $-2\ln(2x+1) < 0$

c) $\ln\frac{x+1}{x-1} < 0$

d) $\ln(x-2) \leq \ln(2x-1)$

e) $\ln(-3x) \geq \ln(x^2-4)$

f) $\ln x \leq \ln(x^2-2x)$

g) $\ln(x^2-9) < 0$

h) $\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \geq \ln x$

i) $\ln(3x^2-x) \leq \ln x + \ln 2$

j) $\ln|x-3| \leq 0$

k) $\ln(2x-1) - \ln(1+x) < \ln 3$

l) $\frac{1}{2}\ln(3x-1) < \ln(1+x)$.

4 Résoudre dans IR chacune des équations suivantes **:**

a) $\ln x = 2$

b) $2\ln x + 1 = 0$

c) $(3-\ln x)\ln x = 0$

d) $\left(-1+\ln\frac{1}{x}\right)^2(\ln x - 5) = 0$

e) $(\ln x)^2 - 3\ln x - 4 = 0$

f) $-3(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 + 7\ln x - 2 = 0$

g) $\ln(2-x) = -3$

h) $\ln(5-2x) = 1$

i) $\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) = 2$

j) $\ln(x^2-8) = 0$

k) $\ln(x+1) - \ln(x-2) = 1$.

5 Résoudre dans IR chacune des inéquations suivantes :

a) $\ln x - 2 < 0$

b) $1 - 2\ln x < 0$

c) $-\ln x + 3 \leq 0$

d) $(\ln x)^2 + 2\ln x + 3 > 0$

e) $(2-\ln x)(1+\ln x) > 0$

f) $-3(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 + 7\ln x - 2 < 0$

g) $(\ln x)^2 - 3\ln x - 4 \leq 0$

h) $(1-2\ln x)(3+\ln x) \leq 0$

i) $3(\ln x)^2 - 2\ln x - 16 \leq 0$.

6 Résoudre dans $IR \times IR$ les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 2\ln x + \ln y = 1 \\ 5\ln x + 3\ln y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (\ln x)(\ln y) = -15 \\ \ln(xy) = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ \ln x + \ln y = \ln 3 \end{cases}$.

7 Dans chacun des cas suivants, résoudre dans l'ensemble *IN* des entiers naturels, l'inéquation d'inconnue *n* proposée :

a) $2^n \leq 100$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 10^{-2}$

c) $\left(1+\frac{3}{100}\right)^n \geq 2$.

8 Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

a) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

b) $f(x) = \frac{x - \ln x}{x}$

c) $f(x) = x - \ln x$

d) $f(x) = x + 1 + \dfrac{\ln x}{x}$

e) $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$

f) $f(x) = \frac{x\ln x}{x+1}$

g) $f(x) = x\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

9 Dans chacun des cas suivants calculer les limites de f aux bornes de l'intervalle

a) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$; $I =]1\,;+\infty[$

b) $f(x) = x(1 - \ln x)$; $I =]0\,;+\infty[$

c) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-4}\right)$; $I =]-\infty\,;-1[$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x}(\ln x - 1)$; $I =]0\,;+\infty[$

e) $f(x) = \dfrac{x+1}{\ln x}$; $I =]1\,;+\infty[$

f) $f(x) = x + \ln(x+1) - \ln x$;
$I =]0\,;+\infty[$.

10 Dans chacun des cas suivants on admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I ; calculer la fonction dérivée f' de f .

a)$f(x) = \ln(1 + x^2)$; $I = IR$

b)$f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$; $I =]1\,;+\infty[$

c)$f(x) = \ln(x-1) - \ln x$;
$I =]1\,;+\infty[$

d)$f(x) = \dfrac{1}{x} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$; $I =]0\,;+\infty[$

e)$f(x) = \ln(\ln x)$; $I =]e\,;+\infty[$

f)$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$; $I =]1\,;+\infty[$.

11 Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$; $I = IR$

b) $f(x) = \tan x$; $I = \left]\dfrac{-\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$

c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x+3}$; $I = IR$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$; $I =]1\,;+\infty[$

e) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$; $I =]0\,;+\infty[$.

Dans les exercices qui suivent le plan est rapporté à un repère orthogonal (O ,I , J)et on désigne par (C) la courbe représentative de f.

12 Soit la fonction f définie sur $]-\infty\,;-1[\ \cup\ ]1\,;+\infty[$par $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

1. Calculer les limites de *f* en -1 et en 1.
2. Démontrer que la fonction f est impaire.
3. Etudier les variations de *f* et dresser son tableau de variation
4. Tracer la courbe (C).

13

Soit f la fonction dérivable sur$]0\,;+\infty[$ *et* définie par $f(x) = x - 4 + \ln(\dfrac{x}{x+1})$.

On note (C) la courbe représentative de *f* dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I;J).

1.a) Déterminer la limite de *f* à droite en 0.

b) Interpréter graphiquement le résultat précédent.

2.a) Déterminer la limite de *f* à droite en $+\infty$.

b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - 4$ est asymptote à (C).

c) Etudier la position relative de (C) par rapport à la droite (D).

3. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4. Construire (C) et (D).

14 D'APRÈS BAC D SESSION 1993

A) On considère g la fonction de IR vers IR, définie par : $g(x) = (x+1)^2 - \ln(1+x)$.

1.Etudier les variations de g.

2. Déterminer le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.

B) On considère f la fonction de IR vers IR, définie par : $f(x) = x + \frac{1+\ln(1+x)}{x+1}$.

Le repère est orthonormé et l'unité est 2 cm.

1.a)Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

b) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)$.

Interpréter graphiquement ce résultat.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

d) Démontrer que la droite (D) d'équation y = x est asymptote à (C) en $+\infty$.

e) Etudier la position de (C) par rapport à (D).

2. a) Démontrer que : $\forall x \in D_f$,
$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$.

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations .

c) Calculer $f(0)$; $f\left(-\frac{1}{2}\right)$; $f\left(\frac{1}{e} - 1\right)$.

3.a) Démontrer qu'il existe un unique nombre réel α appartenant à $]-1;0[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

4. Déterminer le point A de (C) où la tangente (T) à (C) est parallèle à (D).

5.Tracer (D), (T) et (C).

6.a) Démontrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition et l'ensemble d'arrivée.
b) Démontrer que f^{-1} est dérivable en 1 et calculer $(f^{-1})'(1)$.
c) Tracer la courbe (C') de f^{-1} dans le même repère que (C).

15 D'APRÈS BAC D SESSION 2000

Partie A

On considère la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x - 1 - 2\ln x$.
1. Calculer les limites respectives de g à droite en 0 et en $+\infty$.
2. On admet que la fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on note g' sa dérivée.
a) Déterminer g' et étudier son signe.
b) En déduire le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
3. Vérifier que : $g(1) = 0$.
4. Démontrer qu'il existe un unique réel α tel que $\alpha \in]3 ; 4[$ et $g(\alpha) = 0$.
5. Démontrer que :
$\forall x \in]0 ; 1[\cup]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$
$\forall x \in]1; \alpha[, \ g(x) < 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{2} + x - 2x\ln x, si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Le repère (O, I, J) est orthonormé.
1. Démontrer que la fonction f est continue à droite en 0.
2. La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ? Justifier.
En donner une interprétation graphique.
4. Calculer la limite de f en $+\infty$.
5. Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$, puis interpréter graphiquement ce résultat.
6. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on note f' sa dérivée.
a) Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = g(x)$.
b) En utilisant les résultats de la partie A, déterminer le signe de f' .
c) Dresser le tableau de variation de f.
7. Tracer la courbe (C).

16 L'objet de ce problème est l'étude de la fonction f dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = -\dfrac{x^3}{6} + x^2 - \dfrac{x}{2} - x\ln x + \dfrac{2}{3}, si\ x > 0 \\ f(0) = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Le repère est orthonormé et l'unité graphique est 3 cm.

Partie A

On considère la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2} - \ln x$.
1. Calculer les limites de g à en 0 et en $+\infty$.
2. On admet que la fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on note g' sa dérivée.
a) Déterminer g' et étudier son signe.
b) En déduire le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
3. Calculer $g(1)$.
4. Démontrer que :
$\forall x \in]0 ; 1[, g(x) > 0$
$\forall x \in]1; +\infty[, \ g(x) < 0$.

Partie B

1. Démontrer que f est continue en 0.
2. a) f est-elle dérivable à droite en 0 ? Justifier.
En donner une interprétation graphique.
3. Calculer la limite de f en $+\infty$.
4. Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$, puis interpréter graphiquement ce résultat.
5. a) Démontrer que f est une primitive de la fonction g sur $]0 ; +\infty[$.
b) Dresser le tableau de variation de f.
6. Tracer la courbe (C).
7. Soit h la restriction de f à $[1; +\infty[$.
a) Démontrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition et l'ensemble d'arrivée.
b) Calculer h(e).
c) Démontrer que h^{-1} est dérivable en $-\frac{e^2}{6} + e^2 - \frac{3e}{2}$ et
calculer $(h^{-1})'\left(-\frac{e^2}{6} + e^2 - \frac{3e}{2}\right)$.
c) Tracer la courbe (C') de h^{-1} dans le même repère que (C).

17 **A) Etude d'une fonction auxiliaire**

Soit la fonction g dérivable et définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par: $g(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1} - \ln(1+x^2)$.

1.a) Déterminer la limite de g en $+\infty$

b) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

c) Démontrer que sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $1.9 < \alpha < 2$.

2. Déterminer le signe de g sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

B) Etude d'une fonction

f est la fonction définie sur $I = [0\ ;\ +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Etudier la dérivabilité de f en 0. En déduire une interprétation graphique.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$

3. On admet que f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$

a) Démontrer que pour tout nombre réel x strictement positif ,

$f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2} +$

b) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variations.

c) Tracer (C) et sa demi-tangente au point d'abscisse 0.

18 Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{2}(\ln x - \frac{3}{2}) \ si\ x \in\ ]0\ ;\ +\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1.a) Démontrer que f est continue en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0.

2. Calculer la limite de f en $+\infty$

3. On admet que f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.

a) Démontrer que pour tout $x \in\ ]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = x(\ln x - 1)$.

b) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variations.

4. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

et on prendra $\alpha \approx 3{,}5$.

Partie C

Soit la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$g(x) = f(x) + x - \dfrac{1}{4}$

1. Etudier les variations de la fonction dérivée g' de g sur $]0\ ;\ +\infty[$ et dresser son tableau de variation (on ne calculera pas les limites).

2. En déduire le signe de g′ sur $]0\ ;\ +\infty[$, puis le sens de variation de g .

3.a) Calculer $g(1)$ puis déduire de la question précédente le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

b) En déduire la position relative de (T) et (C)

4. Construire (T) et (C).

19 Unité : 2 cm sur (OI) et 1 cm sur (OJ).

Partie A

Soit g la fonction de *IR* vers *IR* définie par

$$\begin{cases} g(0) = -1 \\ g(x) = \dfrac{x}{(\ln x)^2} - 1 \end{cases}$$

1. **a)** Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g.

b) Calculer les limites de g en 1 et en $+\infty$.

2. a**)** Démontrer que g est continue en 0.

b) Etudier la dérivabilité de g en 0.

3. On admet que g est dérivable sur $]0;1[$et sur$]1;+\infty[$.

a) Démontrer que $\forall x \in\ ]0;1[\cup\ ]1;+\infty[$, g'$(x) = \frac{(\ln x)(\ln x - 2)}{(\ln x)^4}$.

b) Déterminer le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

4. **a)** Démontrer que l'équation : $x \in IR$, $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0;1[$.

b) Vérifier que $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$

c) En déduire que :

$\forall x \in\ ]0\ ;\alpha[, \mathrm{g}(x) < 0\ et$

$\forall x \in\ ]\alpha;1[\cup\ ]1;+\infty[, \mathrm{g}(x) > 0$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0;1[\cup\ ]1;+\infty[$,par : $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln x}$.

1.a) Calculer les limites de f en 0, en $+\infty$, à gauche et à droite en 1.

b) Interpréter graphiquement ces résultats.

2. On admet que f est dérivable sur $]0;1[$et sur$]1;+\infty[$.

Démontrer que $\forall x \in\ ]0;1[\cup\ ]1;+\infty[$, $f'(x) = \frac{\mathrm{g}(x)}{x^2}$, puis dresser le tableau de

variation de f .

3.a) Démontrer que. $f(\alpha) = \frac{1+\sqrt{\alpha}}{\alpha}$.

b) En déduire le signe de $f(x)$ sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$.

4. Construire (C). On prendra $\alpha = 0,5$.

Partie C

Soit h la restriction de f à $]1;+\infty[$.

1. Démontrer que h est une bijection de $]1;+\infty[$ sur un intervalle K que l'on précisera.

2. On note h^{-1} la bijection réciproque de *h* et (Γ) sa représentation graphique.

a) Préciser le sens de variation de h^{-1}.

b) Calculer $h(e)$.

c) Justifier que h^{-1} est dérivable en $\frac{1-e}{e}$ et calculer $(h^{-1})'\left(\frac{1-e}{e}\right)$.

20 Partie A

On note *h* la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par *h(x)* = $x^2 - 1 + \ln x$.

1.a) Calculer les limites de *h* aux bornes de son ensemble de définition.

b) Etudier les variations de *h* et dresser son tableau de variation.

c) Calculer h(1).

2. Justifier que :

$\forall x \in]0;1[, h(x) < 0; \forall x \in]1;+\infty[, h(x) > 0.$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x - 1 - \frac{lnx}{x}$.

1.a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b) Démontrer la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est à (C) en $+\infty$..

c) Etudier les positions relatives de (C) et (Δ).

2.a) Démontrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$.

b) En déduire les variations de *f* et dresser son tableau de variation .

3. Construire dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J) d'unité 2 cm la courbe (C) et (Δ).

21 BAC D SESSION 2005

Partie A

Soit la fonction g dérivable et définie sur $]0\ ;\ +\infty[$par: $g(x) = \frac{2}{3}x^3 + 1 - 2\ln x$.

1.a) Démontrer que :

$\forall x \in]0\ ;\ +\infty[$, g'$(x) = \frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x}$.

b) Déterminer le signe de g'(x) suivant les valeurs de x.

c) En déduire les variations de g.

2. a) Dresser le tableau de variation de g .

b) Démontrer que : $\forall x \in]0\ ;\ +\infty[$, g$(x)$ > 0.

Partie A

Soit f la fonction dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et définie par : $f(x) = \frac{2}{3}x - 1 + \frac{\ln x}{x^2}$.

1.a) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b) En déduire que (C) admet une asymptote verticale.

2. a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{2}{3}x - 1$ est une asymptote oblique à (C).

b) Etudier la position de (C) par rapport à (D).

3. a) Démontrer que pour tout nombre $\forall x \in]0\ ;\ +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.

b) Déterminer les variations de f.

4. a) Démontrer que l'équation : $x \in]0\ ;\ +\infty[$, $f(x) = 0$ admet une solution unique α.

b) Démontrer que : 1,15 < α < 1,3.

c) Construire (D) et (C) dans le même repère. (On prendra $\alpha = 1,2$).

4

FONCTION EXPONENTIELLE NÉPÉRIENNE
ETUDE DE FONCTIONS FAISANT INTERVENIR exp

COURS 74

TRAVAUX PRATIQUES 79

EXERCICES 86

COMMENTAIRES

Ce thème vise à :
- définir et étudier la fonction exponentielle ;
- mettre en place les primitives de fonction de la forme $u'e^u$.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES
1. Fonction exponentielle népérienne : - définitions ; - notation ; - propriété ; - représentation graphique . 2. Limites de référence 3.Dérivées de fonctions du type e^u . 4. Primitives de $u'e^u$	☞ Etant donnée une fonction faisant intervenir la fonction exponentielle népérienne, l'étudier et la représenter. ☞ Résoudre des équations ou inéquations faisant intervenir la fonction exponentielle. ☞ Déterminer les primitives d'une fonction du type : $u'e^u$

ACTIVITÉ

1. Rappeler pourquoi la fonction ln est une bijection de $]0;+\infty[$ sur IR.
Cette bijection réciproque est appelée la fonction exponentielle et notée exp .
2. Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J).
Tracer la courbe représentative (Γ) de la fonction ln.
En déduire le tracé de la courbe (C) de la fonction exp.
3. Compléter les lignes suivantes :

- La fonction exp est définie sur ……
- Pour tout x de IR, le signe de $\exp(x)$ est ……
- La fonction exp est strictement ……
- Pour tout x de IR et pour tout y de $]0;+\infty[$:
  $\exp(x) = y \Leftrightarrow x =$ ……

COURS

I. LA FONCTION EXPONENTIELLE NÉPÉRIENNE

1. Définition

On appelle fonction exponentielle népérienne, la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien. On la note **exp .**

2. Conséquences

(1) exp est définie et dérivable sur IR.
(2) Pour tout nombre réel x : $\exp(x) > 0$.
(3) Pour tout nombre réel x et tout nombre réel strictement positif y, on a :
$\exp(x) = y \Leftrightarrow x = \ln y$.
(4) $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e$.
Pour tout nombre réel x et tout nombre réel strictement positif y, on a :
$\exp(x) = y \Leftrightarrow x = \ln y$.
(5) Pour tout $x \in$IR, $\ln(\exp(x)) = x$.
Pour tout $x > 0$, $\exp(\ln x) = x$.

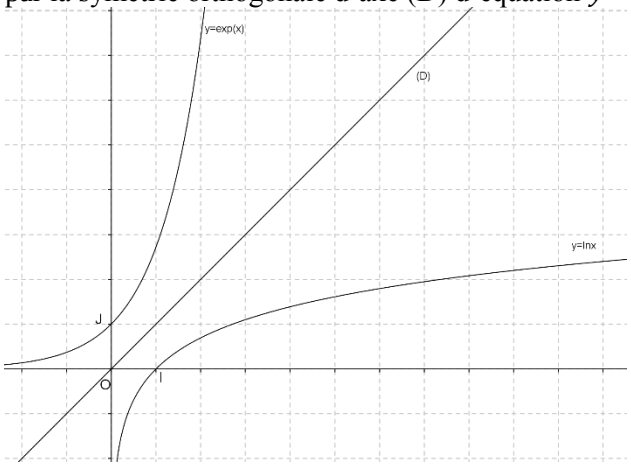
Exemple

Résoudre dans IR :
a) $\exp(x) = 5$; b) $\exp(x) = -5$.

Solution
a) $exp(x) = 5 \Leftrightarrow x = \ln 5$. *Donc l'ensemble des solutions est :* $S = \{\ln 5\}$.
b) L'équation $\exp(x) = -5$ *n'admet pas de solution car* $\exp(x) > 0$ *et -5 < 0.*

3. Représentation graphique

La courbe représentative de la fonction exp se déduit de la courbe représentative de la fonction ln par la symétrie orthogonale d'axe (D) d'équation $y = x$.



4. Propriétés algébriques

Propriétés

Pour tous nombres réels a et b et pour tout nombre rationnel r, on a :
(1) $\exp(a+b) = \exp(a).\exp(b)$;
(2) $\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$;
(3) $\exp(-b) = \frac{1}{\exp(b)}$;
(4) $\exp(ra) = [\exp(a)]^r$.

Exemples

x étant un nombre réel quelconque, simplifier les écritures suivantes :
a) $\exp(5+\ln 2)$; b) $\exp(-1)$; c) $\exp(10) \times (\exp(-4))^3$; d) $\frac{\exp(3x+6)}{\exp(3x-1)}$.

Solution :

a) On a $\exp(5+\ln 2) ; = \exp(5).\exp(\ln 2) = 2\exp(5)$ *;*
b) On a $\exp(-1) = \frac{1}{\exp(1)} = \frac{1}{e}$ *;*
c) $\exp(12) \times (\exp(-4))^3 = \exp(12) \times \exp(-12) = \exp(0) = 1$
d) $\frac{\exp(3x+6)}{\exp(3x-1)} = \exp(3x+6-3x+1) = \exp(7).$

5. La notation e^x

On a : exp(1) = e donc pour tout nombre rationnel r, on a : $\exp(r) = \exp(r\times 1) = (\exp(1))^r = e^r$.

Nous poserons donc par convention : $\forall x \in$IR, $\exp(x) = e^x$.

Propriétés

Pour tous nombres réels a et b et pour tout nombre rationnel r, on a :
(1) $e^{a+b} = e^a e^b$; (2) $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$; (3) $e^{-b} = \frac{1}{e^b}$; (4) $e^{ra} = (e^a)^r$.

II. ÉTUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction exp .

1. Dérivée

Propriété

La fonction exponentielle est dérivable sur IR. Pour tout $x \in$IR , $\exp'(x) = \exp(x)$.

2. Variation

Propriété

La fonction exp est strictement croissante sur IR.

Conséquences

Pour tous nombres réels a et b, on a :
(1) exp(a) = exp(b) ⇔ a = b ;
(2) exp(a) > exp(b) ⇔ a > b .

3. Asymptote et branche parabolique

Propriété

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$; (2) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$; (3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Remarques

● $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc la droite (OI) est asymptote à (C) en $-\infty$.

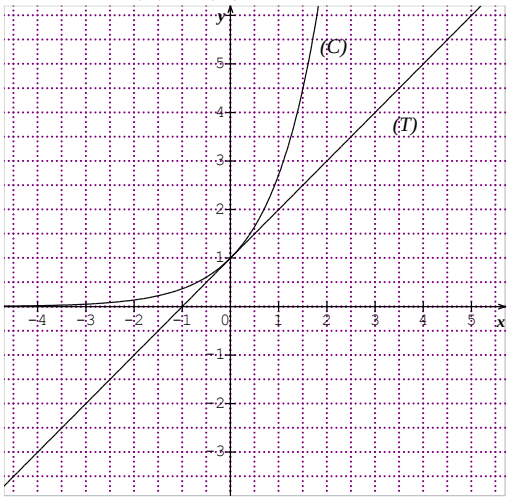
● $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (OJ).

4. Représentation graphique

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\exp'(x)$	+
$\exp(x)$	$+\infty$ 0

● Une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est y = x + 1.

● Traçons (T) et (C).



III. LIMITES DE RÉFÉRENCE

Propriétés

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$; (2) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$; (3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$; (5) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1.$

Exemples

Calculer les limites suivantes :

$a)\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2 + e^x)$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x + 3 - 4\,e^x)$; $c)\lim\limits_{x\to+\infty}(5x - 1 - 2\,e^x)$;

$d)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2} - 1}{x}$; e) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x + 3 + x\,e^x)$; $f)\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^x + 1}{x + e^x}$.

Solution

$a)On\ a \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty\ et \lim\limits_{x\to+\infty}(e^x) = +\infty\ donc \lim\limits_{x\to+\infty}(x^2 + e^x) = +\infty$

b) On a $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x + 3) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-2x) = +\infty\ et \lim\limits_{x\to-\infty}(-4\,e^x) = 0\ donc$:

$\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x + 3 - 4\,e^x) = +\infty$.

$c)\ On\ a \lim\limits_{x\to+\infty}(5x - 1 - 2\,e^x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x(5 - \dfrac{1}{x} - 2\dfrac{e^x}{x})$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0\ et \lim\limits_{x\to+\infty}(-2\dfrac{e^x}{x}) = -\infty \quad car \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x} = +\infty$

$donc \lim\limits_{x\to+\infty}(5 - \dfrac{1}{x} - 2\dfrac{e^x}{x}) = -\infty.$

$De\ plus \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty, \quad on\ a\ donc \lim\limits_{x\to+\infty} x(5 - \dfrac{1}{x} - 2\dfrac{e^x}{x}) = -\infty.$

$Ainsi \lim\limits_{x\to+\infty}(5x - 1 - 2\,e^x) = -\infty.$

$d)On\ a \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2} - 1}{x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2} - 1}{x^2}x$

En posant $x^2 = X, on\ obtient \lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2} = \lim\limits_{X\to0}\frac{e^X-1}{X} = 1. Et\ comme \lim\limits_{x\to0} x = 0$, il en résulte que :

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2} - 1}{x} = 0.$

$e)On\ a \lim\limits_{x\to-\infty}(x + 3) = -\infty\ et \lim\limits_{x\to-\infty}(xe^x) = 0\ donc \lim\limits_{x\to-\infty}(x + 3 + x\,e^x) = -\infty$

$f)\ On\ a \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2e^x+1}{x+e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{\frac{e^x}{x}+1}.$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0\ donc \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2 + \dfrac{1}{x}\right) = 2;\ et \quad \lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{e^x}{x}) = +\infty\ donc \lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{e^x}{x} + 1) = +\infty.$

$Donc \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2 + \dfrac{1}{x}}{\dfrac{e^x}{x} + 1} = 0. Ainsi \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^x + 1}{x + e^x} = 0.$

IV. FONCTIONS DU TYPE : $x \longmapsto e^{u(x)}$

1. Dérivée

Propriété

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction e^u est dérivable sur I et $(e^u)' = u'e^u$

Exemples

Dans chacun des cas suivants, on admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I. Calculer la dérivée de f :

$a)$ $f: x \longmapsto e^{-x^2+x}$,sur I = IR ; $b)$ $f: x \longmapsto e^{\frac{x}{x-2}}$,I = $]2;+\infty[$, $c) f: x \longmapsto xe^{2x}$,I = IR.

Solution

a) Pour tout $x \in IR, f'(x) = (-2x+1)e^{-x^2+x}$.

b) Pour tout $x \in IR, f'(x) = \frac{-2}{(x-2)^2} e^{\frac{x}{x-2}}$.

c) Pour tout $x \in IR, f'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x} = (1+2x)e^{2x}$.

2. Primitives

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que sa dérivée u' soit continue sur I.
Une primitive sur I de la fonction $u'e^u$ est la fonction e^u .

Exemple 1

Une primitive de la fonction exp est elle-même.

Exemple 2

Dans chacun des cas suivants, on admet que la fonction f est continue sur l'intervalle I. Déterminer une primitive de f sur I:

a) $f: x \longmapsto xe^{\frac{1}{2}x^2-1}$; I = IR b) $f: x \longmapsto e^{-2x+1}$; I = IR $c) f: x \longmapsto \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$; I =$]0;+\infty[$.

Solution

a) *La fonction* $f: x \longmapsto xe^{\frac{1}{2}x^2-1}$ *est de la forme* $x \longmapsto u'(x)e^{u(x)}$ *avec* $u(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$ *, donc une primitive sur IR de* f *est la fonction* $F: x \longmapsto e^{\frac{1}{2}x^2-1}$.

b)*La fonction* $f: x \longmapsto e^{-2x+1}$ *est de la forme* $x \longmapsto -\frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$ *avec* $(x) = -2x+1$ *, donc une primitive sur IR de* f *est la fonction* $F: x \longmapsto -\frac{1}{2}e^{-2x+1}$.

c) En posant $u(x) = \sqrt{x}$ *, on a* $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ *. D'où* $f(x) = 2u'(x)e^{u(x)}$.

Donc une primitive de f sur $]0;+\infty[$ *est la fonction* $F: x \longmapsto 2e^{\sqrt{x}}$.

Remarque

a et b étant deux nombres réels tels que $a \neq 0$, une primitive sur IR de la fonction $\boldsymbol{x \longmapsto e^{ax+b}}$ est la fonction $\boldsymbol{x \longmapsto \frac{1}{a}e^{ax+b}}$.

TRAVAUX PRATIQUES

EXERCICE RÉSOLU 1
Résoudre dans IR l'équation (E) : $e^{2x} + e^x - 12 = 0$.

L'ensemble de validité de l'équation (E) est IR.
Vu la forme de l'équation, il convient d'effectuer le changement de variable $X = e^x$. *Alors on obtient l'équation* $X \in]0\,;\,+\infty[\,, X^2 + X - 12 = 0$.
La résolution dans IR de l'équation $X^2 + X - 12 = 0$ *donne pour solutions* -4 *et* 3.
Par suite l'équation $X \in]0\,;\,+\infty[\,, X^2 + X - 12 = 0$ *a pour solution* $X = 3$.
Ainsi, l'équation (E) équivaut à $x \in IR\,, e^x = 3$ *, soit* $x = ln\,3$.
Donc S = {ln3}.

EXERCICE RÉSOLU 2
Résoudre dans IR chacune des inéquations suivantes
(I_1) : $e^x - 2 < 0$;
(I_2) : $e^{-x} + 1 \leq 0$;
(I_3) $e^x + 3 > 0$;
(I_4) : $(e^x - 3)(e^x + 4) \geq 0$;
(I_5) : $(e^x - 1)(-2e^x + 3) > 0$;
(I_6) : $2e^{2x} - 5e^x + 2 \geq 0$.

Solution:
♦***Résolution de (I_1):*** *:* $e^x - 2 < 0$
$e^x - 2 < 0 \Leftrightarrow e^x < 2 \Leftrightarrow x < ln\,2$.
D'où l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_1) est $]-\infty; ln\,2[$.

♦***Résolution de (I_2):*** $e^{-x} + 1 \leq 0$
Pour tout nombre réel x, *le nombre réel* $e^{-x} + 1$ *est strictement positif. Par suite l'inéquation (I_2) n'admet pas de solution dans IR.*

♦***Résolution de (I_3):*** *:*$e^x + 3 > 0$
Pour tout nombre réel x, *le nombre réel* $e^x + 3$ *est strictement positif.*
Par suite, l'ensemble des solutions de (I_3) est IR.

♦***Résolution de (I_4):*** $(e^x - 3)(e^x + 4) \geq 0$
Ici, on gagne en simplicité en remarquant que l'un des facteurs du premier membre est strictement positif sur l'ensemble de validité. Ainsi, on peut adopter la rédaction suivante :

$$(e^x - 3)(e^x + 4) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 3 \geq 0 \;\; car\ pour\ tout\ x \in IR\ e^x + 4 > 0$$
$$\Leftrightarrow e^x \geq 3$$
$$\Leftrightarrow x \geq ln\,3\,.$$

D'où l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_3) est $S = [ln\,3\,;+\infty[$.

♦***Résolution de (I_5):***$(e^x - 1)(-2e^x + 3) > 0$
●$e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$
●$-2e^x + 3 < 0 \Leftrightarrow -2e^x < -3 \Leftrightarrow e^x > \frac{3}{2} \Leftrightarrow x > ln\frac{3}{2}$.
D'où le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	0		$ln\frac{3}{2}$	$+\infty$
e^x-1	$-$	0	$+$		$+$
$-2e^x+3$	$+$		$+$	0	$-$
$(e^x-1)(-2e^x+3)$	$-$	0	$+$	0	$-$

D'après le tableau de signe, l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_5) est $\left]0\,;\ ln\frac{3}{2}\right[$.

♦***Résolution de (I_6):*** $2e^{2x}-5e^x+2\geq 0$

Vu la forme de l'inéquation, il convient d'effectuer le changement de variable $X=e^x$ *, alors on obtient l'inéquation* $X\in\ ]0;+\infty[\ ,\ 2X^2-5X+2\geq 0$.

Le polynôme du second degré $2X^2-5X+2$ *ayant pour zéros* $\frac{1}{2}$ *et* 2 *, il vient :*

$X\in\ ]0;+\infty[\ ,\ 2X^2-5X+2\leq 0\Leftrightarrow X\in\left]0;\frac{1}{2}\right]\cup[2\ ;\ +\infty[$ *(règle du signe d'un polynôme du second degré)*

$2e^{2x}-5e^x+2\geq 0\ \Leftrightarrow e^x\in\left]0;\frac{1}{2}\right]\cup[2\ ;\ +\infty[\ \Leftrightarrow 0<e^x\leq\frac{1}{2}$ *ou* $e^x\geq 2$

$\Leftrightarrow x\leq ln\frac{1}{2}$ *ou* $x\geq ln\,2$

D'où, l'ensemble des solutions de (I_6) est S= $\left]-\infty;ln\frac{1}{2}\right]\cup[ln2;+\infty[$.

EXERCICE RÉSOLU 3

Résoudre dans IR chacune des équations suivantes :

(E_1) : $e^{\frac{2x+1}{x-2}}=1$; (E_2) : $e^{x^2-3x+1}=e$; $(\mathrm{E}_3)e^{\frac{2x+1}{x-2}}=e^{x+4}$

Solution

Résolution de $(\boldsymbol{E_1})$: $\boldsymbol{e^{\frac{2x+1}{x-2}}=1}$

L'ensemble de validité D_1 *de* $(\boldsymbol{E_1})$ *est* $D_1=\{x\in IR/\,x-2\neq 0\}=IR\setminus\{2\}$

$Soit\ x\in IR\setminus\{2\}$,

$e^{\frac{2x+1}{x-2}}=1\ \Leftrightarrow\frac{2x+1}{x-2}\ \Leftrightarrow 2x+1=0\ \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$.

Et comme $-\frac{1}{2}$ *appartient à* D_1 *alors l'ensemble des solutions de* (E_1)*est* $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

Résolution de $(\boldsymbol{E_2})$: $\boldsymbol{e^{x^2-3x+1}=e}$

L'ensemble de validité D_2 *de* $(\boldsymbol{E_2})$*est* $D_2=IR$.

$e^{x^2-3x+1}=e\Leftrightarrow e^{x^2-3x+1}=e^1\ \Leftrightarrow x^2-3x+1=1\ \Leftrightarrow x^2-3x=0\ \Leftrightarrow x=0$ *ou* $x=3$.

D'où l'ensemble des solutions de (E_2) *est* $\{0\,;3\}$.

Résolution de $(\boldsymbol{E_3})$: $\boldsymbol{e^{\frac{2x+1}{x-2}}=e^{x+4}}$

L'ensemble de validité D_3 *de* $(\boldsymbol{E_3})$ *est* $D_3=\{x\in IR/\,x-2\neq 0\}=IR\setminus\{2\}$.

$Soit\ x\in IR\setminus\{2\}$,

$e^{\frac{2x+1}{x-2}}=e^{x+4}\Leftrightarrow\frac{2x+1}{x-2}=x+4\ \Leftrightarrow x=-3$ *ou* $x=3$.

Comme -3 *et* 3 *appartiennent à* D_3 *alors l'ensemble des solutions de* (E_3) *est* $\{\boldsymbol{-3}\,;\boldsymbol{3}\}$.

EXERCICE RÉSOLU 4

Résoudre dans IR chacune des inéquations suivantes :

(I_1) : $e^{\frac{2x+1}{x-2}} < 1$; (I_2) : $e^{x^2-3x+1} \leq e$; (I_3): $e^{\frac{2x+1}{x-2}} > e^{x+4}$.

Solution

♦***Résolution de*** (I_1) : $e^{\frac{2x+1}{x-2}} < 1$

L'ensemble de validité D_1 *de* (I_1)*est* $D_1 = \{x \in IR / x - 2 \neq 0\} = IR \setminus \{2\}$.

Pour tout $x \in IR \setminus \{2\}$, $e^{\frac{2x+1}{x-2}} < 1 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-2} < 0$.

L'etude du signe de $\frac{2x+1}{x-2}$ *permet d'obtenir :* $\frac{2x+1}{x-2} < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{1}{2}\,;2\right[$.

D'*où* l'*ensemble des solutions de* (I_1) *est* $\left]-\frac{1}{2}\,;2\right[\cap D_1 = \left]-\frac{1}{2}\,;2\right[$.

♦***Résolution de*** (I_2) : $e^{x^2-3x+1} \leq e$

L'ensemble de validité D_2 *de* (I_2) *est* $D_2 = IR$.

$e^{x^2-3x+1} \leq e \Leftrightarrow e^{x^2-3x+1} \leq e^1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 \leq 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x \leq 0 \Leftrightarrow x \in [0\,;3]$.

D'où l'ensemble des solutions de (I_2)*est* $[0\,;3]$.

Résolution de (I_3) : $e^{\frac{2x+1}{x-2}} > e^{x+4}$

L'ensemble de validité D_3 *de* (I_3)*est* $D_3 = \{x \in IR / x - 2 \neq 0\} = IR \setminus \{2\}$.

Soit $x \in IR \setminus \{2\}$,

$e^{\frac{2x+1}{x-2}} > e^{x+4} \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-2} > x + 4 \Leftrightarrow \frac{-x^2+9}{x-2} > 0$.

L'étude du signe de $\frac{-x^2+9}{x-2}$ *donne :* $S = \,]-\infty\,;-3[\cup]2\,;3[$.

EXERCICE RÉSOLU 5

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{3e^x-1}{e^x+1}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2 cm.

Partie A

1. a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de *f*.

b) Démontrer que le point A(0 ; 1) est centre de symétrie de la courbe (C).

2. Déterminer les limites de *f* en $+\infty$ et en $-\infty$, puis interpréter graphiquement chacun des résultats obtenus.

3. Démontrer que *f* est strictement croissante sur IR et dresser son tableau de variation.

4. a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point A.

b) On considère la fonction h définie par $h(x) = f(x) - (x + 1)$.

Démontrer que pour tout x de IR, $h'(x) = -\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$. En déduire le sens de variation de h.

c) Calculer h(0), puis déterminer le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.

d) En déduire la position de (C) par rapport à (T).

5. Tracer la droite (T), la courbe (C) et ses asymptotes.

Partie B

1. Démontrer que pour tout x de IR, $f(x) = \frac{4e^x}{e^x+1} - 1$.

2. En déduire une primitive F de *f* sur $\mathbb{R}$.

Partie C

1. Démontrer que *f* est une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera.
2. f^{-1} désigne la bijection réciproque de *f*.
a) Calculer *f*(ln3).
b) Justifier que f^{-1} est dérivable en 2 et calculer $(f^{-1})'(2)$.
c) Démontrer que : $\forall x \in]-1;3[, f^{-1}(x) = ln\left(\frac{1+x}{3-x}\right)$.
3. (C') désigne la courbe représentative de f^{-1} dans le plan muni du repère (O, I, J). Construire (C').

Solution

Partie A

1)a. *Pour tout* $x \in IR$, $e^x + 1 \neq 0$ *car* $\forall x \in IR, e^x + 1$. *Par suite* $D_f = IR$.

Un point $A(a;b)$ *est centre de symétrie de (C) si et seulement si :*

pour tout $x \in D_f$, $2a - x \in D_f$ *et* $f(2a-x) + f(x) = 2b$

Pour le point $A(0;1)$, *on a :* $a = 0$, $b = 1$ *et* $2a - x = -x$.

Pour tout $x \in IR$, $-x \in IR$ *et on a :* $f(-x) + f(x) = \frac{3e^{-x}-1}{e^{-x}+1} + \frac{3e^x-1}{e^x+1} = \frac{3-e^x}{1+e^x} + \frac{3e^x-1}{e^x+1}$

$f(-x) + f(x) = \frac{2e^x+2}{e^x+1} = 2 = 2 \times 1$. *D'où le point* $A(0;1)$ *est le centre de symétrie de (C).*

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{3e^x-1}{e^x+1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{3-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}\right)$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ *donc* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$. *D'où* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$.

Interprétation graphique : La droite d'équation $y = 3$ *est asymptote à (C) en* $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{3e^x-1}{e^x+1}\right) = -1$ *car* $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Donc la droite d'équation $y = -1$ *est asymptote à (C) en* $-\infty$.

3.a) $\forall x \in IR$, $f'(x) = \frac{3e^x(e^x+1)-e^x(3e^x-1)}{(e^x+1)^2} = \frac{3e^{2x}+3e^x-3e^{2x}+e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{4e^x}{(e^x+1)^2}$.

b) *Pour tout x*$\in IR$, $4e^x > 0$ *et* $(e^x+1)^2 > 0$ *alors pour tout* $x \in IR$ $f'(x) > 0$.

Par conséquent f *est strictement croissante sur IR.*

Tableau de variation

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	-1 ↗ 3

4.a) $f'(0) = 1$ *et* $f(0) = 1$, *par suite, une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0 est :* $y = x + 1$.

b) *Pour tout* $x \in IR$, $h'(x) = f'(x) - 1 = \frac{-(e^{2x}-2e^x+1)}{(e^x+1)^2} = \frac{-(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2} = -\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$.

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

Pour tout $x \in IR \setminus \{0\}$, $h'(x) < 0$. *La fonction h est donc strictement décroissante sur IR.*

c) Signe de h

h est strictement décroissante sur IR et h(0)=0, par suite on a :

$\forall x \in]-\infty;0[\ , h(x) > 0\ ;\ \ \forall\, x \in]0;+\infty[\ \ , h(x) < 0.$

d) Position relative de (C) et (T)

La position relative de (C) et (T) relève du signe de $h: x \longmapsto f(x) - (x+1)$.

D'après c.), $\forall\, x \in]-\infty;0[\ , h(x) > 0$ *et* $\forall\, x \in]0;+\infty[,\ h(x) < 0.$

On en déduit que (C) est au-dessus de (T) sur $]-\infty;0[$ *et que (C) est au-dessous de (T) sur* $]0;+\infty[$.

5. Représentations graphiques (C) et (T) et les asymptotes (voir figure ci-après)

Partie B

1. $Pour\ tout\ x \in IR\ , f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$.

$Par\ ailleurs, pour\ tout\ x \in IR\ ,\quad \frac{4e^x}{e^x+1} - 1 = \frac{4e^x - (e^x+1)}{e^x+1} = \frac{3e^x - 1}{e^x+1}$

$d'où, pour\ tout\ \ x \in IR, f(x) = \frac{4e^x}{e^x+1} - 1.$

2. $La\ fonction\ x \longmapsto \frac{e^x}{e^x+1}\ est\ de\ la\ forme\ x \longmapsto \frac{u'(x)}{u(x)}\ avec\ u(x) = e^x + 1\ .$

$Par\ suite, une\ primitive\ sur\ IR\ de\ la\ fonction\ f: x \longmapsto \frac{4e^x}{e^x+1} - 1\ \ est\ la\ fonction$

$F: x \longmapsto 4\ ln(e^x + 1) - x.$

Partie C

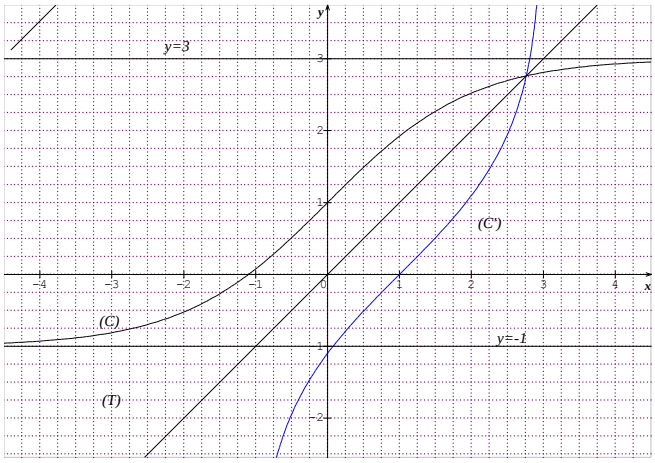
1. L*a fonction f est continue et strictement croissante sur IR, elle est donc une bijection de IR sur f(IR) =* $]-1;3[$.

2.a) $f(ln\,3) = \frac{3e^{ln\,3} - 1}{e^{ln\,3} + 1} = \frac{9-1}{3+1} = 2.\ On\ a:\ f'(ln\,3) = \frac{4e^{ln\,3}}{(e^{ln\,3}+1)^2} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}.$

$f'(ln\,3) \neq 0$ *donc* f^{-1} *est dérivable en 2 et on a :* $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(ln\,3)} = \frac{4}{3}.$

4. Représentation graphique (C') de $\boldsymbol{f^{-1}}$ ***(voir figure ci – après)***

(C) et (C') sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Exercice résolu 6

On considère la fonction f dérivable sur *IR* et définie par $f(x) = (1 - x^2)e^{1-x}$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2 cm.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Interpréter graphiquement ce résultat.

2.a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b) Interpréter graphiquement ces résultats.

3.a) Démontrer que : $\forall x \in IR,\ f'(x) = (x^2 - 2x - 1)e^{1-x}$

b) Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation de f.

4. Déterminer une équation des tangentes (T) et (T') à (C) aux points d'abscisses respectives -1 et 1.

5. Tracer (T), (T') et (C).

On donne $f\left(1-\sqrt{2}\right) \approx 3{,}41$ *et* $f\left(1+\sqrt{2}\right) \approx -1{,}17$.

6. Soit g la restriction de f à [1-$\sqrt{2}$; 1+$\sqrt{2}$].

a) Démontrer que g est une bijection de [1-$\sqrt{2}$; 1+$\sqrt{2}$] sur [g(1+$\sqrt{2}$); g(1-$\sqrt{2}$)]

b) Démontrer que la bijection réciproque g^{-1} de g est dérivable en 0 et calculer $(g^{-1})'(0)$.

c) Construire la courbe représentative (C') de g^{-1}.

1.a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (1-x^2)e^{1-x}$

Posons $X = 1 - x$, *on a :* $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-x^2)e^{1-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} (-X^2+2X)e^{X} = \lim\limits_{X\to-\infty} (-X^2e^{X} + 2Xe^{X})$

$\lim\limits_{X\to-\infty} X^2e^{X} = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{X\to-\infty} (-X^2e^{X}) = 0;$

$\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^{X} = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{X\to-\infty} (2Xe^{X}) = 0$.

Donc par somme, $\lim\limits_{X\to-\infty} (-X^2e^{X} + 2Xe^{X}) = 0$. *Ainsi,* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ *donc la droite d'équation (OI) est asymptote à (C) en* $+\infty$.

2.a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (1-x^2)e^{1-x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (1-x^2) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-x^2) = -\infty.$

Posons $X = 1 - x$, *on a :* $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty.$

On a ; $\lim\limits_{x\to-\infty} (1-x^2) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} = +\infty$ *donc par produit,* $\lim\limits_{x\to-\infty} (1-x^2)e^{1-x} = -\infty.$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(1-x^2)e^{1-x}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(1-x^2)}{x} e^{1-x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(1-x^2)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(-x^2)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} (-x) = +\infty.$

De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} = +\infty$ *(d'après la question ci-dessus).*

Finalement, par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(1-x^2)}{x} e^{1-x} = +\infty$. *Ainsi,* $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ *donc (C) admet en -*∞ *une branche parabolique de direction (OJ).*

3.a) $\forall x \in IR,\ f'(x) = (-2x)e^{1-x} - (1-x^2)e^{1-x} = (x^2 - 2x - 1)e^{1-x}$.

b) $\forall x \in IR,\ e^{1-x} > 0$ *donc* $f'(x)$ *a le signe de* $x^2 - 2x - 1$.

Les zéros de $x^2 - 2x - 1$ *sont* $1-\sqrt{2}$ *et* $1+\sqrt{2}$. $x^2 - 2x - 1$ *a le signe de a à l'extérieur des zéros.*

Par suite :

$\forall x \in \left]-\infty; 1-\sqrt{2}\right[\cup \left]1+\sqrt{2}; +\infty\right[, f'(x) > 0$ *et* $\forall x \in]1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}\ [, f'(x) > 0.$

Par conséquent,

f *est strictement croissante sur* $\left]-\infty; 1-\sqrt{2}\ \right]$ *et sur* $\left[1+\sqrt{2}; +\infty\right[$;

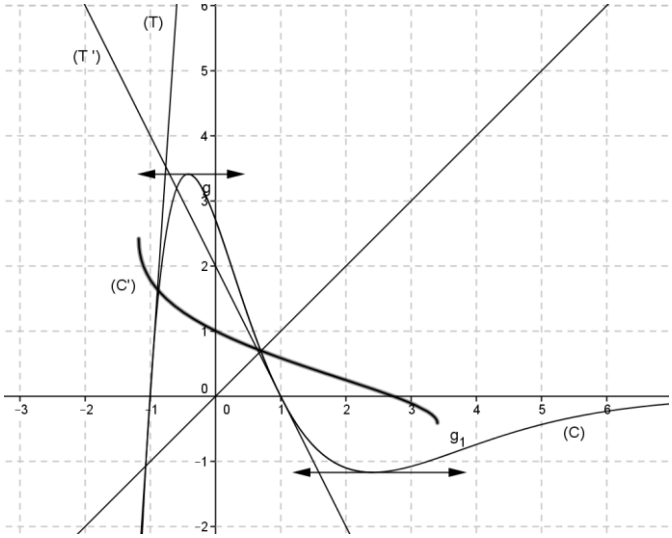
f *est strictement décroissante sur* $[1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}\ ]$.

D'où le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(1-\sqrt{2})$	↘	$f(1-\sqrt{2})$	↗	0

4. Une équation de la tangente (T) est : $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$.
Soit (T) : $y = 2e^2x + 2e^2$.
Une équation de la tangente (T') est : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$. *Soit (T) :* $y = -2x + 2$.

5. Représentations graphiques de (T), (T') et (C).



6.a) La fonction f est continue et strictement décroissante sur [1-$\sqrt{2}$; 1+$\sqrt{2}$].
Comme g est la restriction de f à [1-$\sqrt{2}$; 1+$\sqrt{2}$] donc g *est continue et strictement décroissante sur* [1-$\sqrt{2}$; 1+$\sqrt{2}$].
Donc g *une bijection de* [1-$\sqrt{2}$; 1+$\sqrt{2}$] sur g$\left([1-\sqrt{2}\,;\,1+\sqrt{2}\,]\right)$= [g(1+$\sqrt{2}$); g(1-$\sqrt{2}$)].
b) $1 \in$[1-$\sqrt{2}$; 1+$\sqrt{2}$] et $g(1) = 0$.
On a : $g'(1) = -2$.
Ainsi, $g'(1) \neq 0$ *donc* g^{-1} *est dérivable en 0 et on a :* $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'(1)} = -\frac{1}{2}$.
c) Représentation graphique (C') de g^{-1} *(voir figure ci – après)*
(C') est le symétrique de la représentation graphique de g par rapport à la droite d'équation $y = x$.

EXERCICES

1 Simplifier les expressions suivantes pour tous nombres réels *x* et *y* :

a) $(e^x)^3 e^{2x}$;

b) $\frac{e^{x-1}}{e^{x-2}}$;

c) $\frac{e^{3x}}{(e^{-x})^2 \times e^x}$;

d) $\frac{e^x e^y}{e^{x-y}}$.

2 Soit g et h les fonctions définies sur IR par : $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

1. Etudier la parité des fonctions g et h.

2. Démontrer que $[g(x)]^2 - [h(x)]^2 = 1$.

3. Démontrer que $g(2x) = 2[g(x)]^2 - 1$ et que $h(2x) = 2g(x) \times h(x)$.

3 Soit *f* la fonction définie sur IR par : $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

1. Etudier la parité de la fonction f.

.2.Démontrer que pour tout réel , $f(2x) = \frac{2f(x)}{1+[f(x)]^2}$.

4 Résoudre dans IR chacune des équations proposées :

a) $e^{3-x} = 1$;

b) $e^{2x^2+3} = e^{7x}$;

c) $2\text{-}e^x = 0$;

d) $e^x + 7 = 0$;

e) $(e^x - 2)(e^{-x} + 1) = 0$;

f) $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$;

g) $2e^x - 2e^{-x} - 3 = 0$;

h) $e \times e^x = e^{\frac{2}{x}}$.

5 Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

a) $e^x - 3 \geq 0$

b) $e^{-x} - 4 > 0$

c) $e^{1-x} + 2 > 0$

d) $2e^{2x} - 3e^x - 2 \leq 0$

e) $(e^x - 3)(5 - e^x) \leq 0$

f) $\frac{e^x - 1}{e^x - 2} \geq 0$

g) $2e^x - 3e^{-2x} > 0$.

6 Les polynômes P et Q sont définies par

$P(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$ et

$Q(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$.

1 .a) Justifier que : $P(x) = (x-1)(x+4)(x-2)$.

b)Résoudre dans IR l'équation :

$e^{3x} + e^{2x} - 10e^x + 8 = 0$.

2. a) Calculer $Q(1)$ et $Q(-1)$ et en déduire une factorisation de $Q(x)$.

b) Résoudre dans IR l'équation :

$6e^{-4x} - e^{-3x} - 7e^{-2x} + e^{-x} + 1 = 0$.

7 Résoudre dans IR^2 les systèmes suivants :

(1) $\begin{cases} \ln x - 2\ln y = \ln 2 \\ \frac{e^x}{e^y} = \left(\frac{1}{e^y}\right)^3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} -\ln(x+4) + \ln(y+1) = \ln 2 \\ e^x - e^{2y+1} = 0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} e^{x+\ln 2} + e^{y+\ln 5} = 16 \\ e^{x+\ln 3} + e^{y+\ln 3} = 15 \end{cases}$.

8 *f* est une fonction de IR vers IR.

Calculer les limites de *f* aux bornes de son ensemble de définition :

a) $f(x) = \frac{e^x - 1}{2x}$

b) $f(x) = e^{2x} - e^x + 1$

c) $f(x) = 2xe^{-x}$

d) $f(x) = 2x + e^{-x}$

e) $f(x) = \frac{e^x - 1}{2e^x + 1}$

f) $f(x) = \frac{1}{x}(e^{2x} - 1)$

g) $f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$

h) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{e^x - 1}$.

9 Dans chacun des cas suivants, on admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I.
Calculer la dérivée de f.
a) $f(x) = e^{-2x+1}$, I = IR ;
b) $f(x) = e^{x^2}$, I = IR ;
c) $f(x) = e^x \ln x$, I =]0 ;+∞[;
d) $f(x) = (1-x)e^{1-x} + x$, I = IR ;
e) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, I = IR ;
f) $f(x) = x^2 e^{-x}$, I = IR.

10 **1.** Dans chacun des cas suivants déterminer une primitive de la fonction *f* sur l'intervalle IR
a) $f(x) = e^{-4x}$
b) $f(x) = xe^{x^2}$
c) $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$
d) $f(x) = x-5 +3e^{-2x+1}$.
2. Soit les fonctions g et h définies sur IR par :
$g(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ et $h(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$.
a) Déterminer une primitive de g sur IR.
b) Déterminer une primitive de $g + h$ sur IR.
c) En déduire une primitive de h sur IR.

11 Soit la fonction $f : x \mapsto (x^2 - 3x)e^{-x}$.
Déterminer les nombres réels a, b, c tels que la fonction F : $x \longmapsto (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ soit une primitive de f sur IR.

Dans les exercices ci-dessous, le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J).
(C) désigne la courbe représentative de la fonction f.

12 ***Partie A***
Soit la fonction h dérivable sur IR et définie par : $h(x) = 3 + (x-1)e^{-x}$.
1. Déterminer les limites de h en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. a) Démontrer que pour tout $x \in$ IR, $h'(x) = (2-x)e^{-x}$.
b) En déduire les variations de h et dresser son tableau de variations.
3. Démontrer que sur l'intervalle $]-\infty ; 2]$ l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α et que $-1 < \alpha < 0$.

4. En déduire que :
$\forall\, x \in]-\infty ; \alpha[, h(x) < 0$;
$\forall\, xx \in]\alpha ; +\infty[, h(x) > 0$.

Partie B
Soit la fonction numérique f définie sur IR par: $f(x) = 3x + 1 - xe^{-x}$.
1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Démontrer que pour tout nombre réel x, on a $f'(x) = h(x)$.
3. En déduire les variations de f et dresser son tableau de variations.
4. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = 3x + 1$ est asymptote à (C)en $+\infty$.
5. Etudier la position relative de (C) et (Δ) .
6. Démontrer que (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (OJ).
7. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
8. Tracer (C_f) , (Δ) et (T).
On prendra $\alpha = -0{,}6$ et $f(\alpha) = 0{,}3$.

13 **D'APRÈS BAC D SESION 1998**
Le plan est muni d'un repère orthonormé (O , I , J) (unité 2 cm).
Partie A
On considère la fonction g dérivable sur *IR* et définie par $g(x) = x + 1 - e^x$.
1. Calculer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$
2. Calculer $g'(x)$pour tout $x \in IR$.
3. Etudier suivant les valeurs de x le signe de $g'(x)$ puis dresser le tableau de variation de g.
En déduire le signe de $g(x)$suivant les valeurs de x.

Partie B
On considère la fonction f dérivable sur *IR* et définie par : $f(x) = 3(x^2 + x)e^{-x}$.
1.a) Calculer la limite de f en $+\infty$.
b) Calculer les limites de $f(x)$ et $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $-\infty$.
c) Interpréter graphiquement les résultats des questions a) et b).
2.a) Démontrer que : $\forall x \in IR$, $f'(x) = 3(-x^2 + x + 1)e^{-x}$.
b) Etudier suivant les valeurs de x le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.
On ne cherchera pas à calculer $f(\frac{1-\sqrt{5}}{2})$ et

$f(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$.

3.a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

b) Démontrer que :$\forall\ x \in IR$, $f(x) - 3x = 3xe^{-x}g(x)$.

c. Déduire de la ***partie A*** la position relative de (C) par rapport à (T).

4. Tracer la tangente (T) et la courbe (C).

On prendra $\sqrt{5} \approx 2{,}2$; $f\ (\frac{1-\sqrt{5}}{2}) \approx$ -1,3 et $f\ (\frac{1+\sqrt{5}}{2}) \approx 2{,}5$.

5. Soit la fonction F définie sur IR par $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ où a, b et c sont des nombres réels.

Déterminer a, b et c pour que la fonction F soit une primitive de f sur IR.

14 Partie A

Soit g la fonction de *IR* vers *IR* définie par : $g(x) = 1 + \frac{e^x}{e^x - 1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_g de g et calculer les limites aux bornes de D_g.

2. Résoudre dans *IR* l'équation : $g(x) = 0$.

3. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

4. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

On considère la fonction f de IR vers IR définie par $f(x) = x + \ln(4|1 - e^x|)$.

1.a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de *f*.

b) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f.

2.**a)** Justifier que

$\begin{cases} \forall x \in]-\infty\ ;\ 0[, f(x) = x + \ln 4 + \ln(1 - e^x) \\ \forall x \in]0\ ;\ +\infty[, f(x) = 2x + \ln 4 + \ln(1 - e^{-x}) \end{cases}$

b) Justifier que les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives : $y = x + \ln 4$ et $y = 2x + \ln 4$ sont asymptotes obliques à (C)respectivement en $-\infty$ et $+\infty$.

c) Calculer les coordonnées du point d'intersection *A* de (C)et (D_1).

d) Etudier la position de (C_f)par rapport à (D_2) sur $]0\ ;\ +\infty[$.

3.**a)** On admet que *f* est dérivable sur D_f. Vérifier que $\forall x \in D_f\ , f'(x) = g(x)$.

b) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

4. Soit h la restriction de f à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

a) Justifier que l'équation $h(x) = 0$ admet dans $]0\ ;\ +\infty[$ une solution unique α et que $0{,}18 < \alpha < 0{,}19$.

b) Calculer les valeurs exactes de $h(\ln 2)$ et $(h^{-1})'(\ln 8)$ où h^{-1} est la bijection réciproque de *h*.

5. Prouver que la courbe (C) coupe (*OI*) en deux points *P* et *Q* dont on déterminera les coordonnées. On prendra $x_P < x_Q$.

6. Tracer la courbe (C) et toutes ses asymptotes et la courbe (Γ) de h^{-1} et ses asymptotes.

15 ***Partie A***

1. Résoudre dans *IR* , $\frac{e^{2x} - 9}{e^x - 5} \leq 0$.

2. Démontrer que :

$$e^{2x} - 10e^x + 9 \succ 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 0[\cup]\ln 9; +\infty[$$

Partie B

Soit f la fonction numérique définie sur $]-\infty; \ln 3[\cup]\ln 5; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x} - 9}{e^x - 5}\right).$$

1. a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à (C).

c) Préciser les autres asymptotes.

2. a) Démontrer que :

$$\forall x \in D_f\ , f'(x) = \frac{e^x\left(e^{2x} - 10e^x + 9\right)}{\left(e^x - 5\right)\left(e^{2x} - 9\right)}.$$

b) Déduire du A-2) le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x et donner le sens de variation de f .

c) Dresser le tableau de variation de f .

3. a) Donner la position de la courbe (C)

relativement à son asymptote oblique (D).

b) Déterminer le point A d'intersection de la courbe (C) avec (OI).

4. Construire la courbe (C) et ses asymptotes.

16 Le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).L'unité graphique est 2 cm.

Partie A

On considère la fonction g dérivable et définie sur IR par : $g(x) = 1 + (x-1)e^x$.

1. a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

b) Calculer $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ puis donner une interprétation graphique du résultat.

2. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

3. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

On considère la fonction f dérivable et définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{e^x-1}{x} + lnx$.

On note (C) la courbe représentative de *f*.

1. a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis donner une une interprétation graphique du résultat.

c) Calculer la limite de f à droite en 0 puis donner une interprétation graphique du résultat.

2.a) Démontrer que pour nombre réel x de $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} + \frac{1}{x}$.

b) Dresser le tableau de variation de *f*.

3.a) Démontrer que l'équation :

(E) : $x \in]0;+\infty[$, $f(x) = 0$ admet une solution unique α.

b) Justifier que : $0{,}3 < \alpha < 0{,}4$.

4. Construire (C) .

17 Le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).L'unité graphique est 4 cm.

On considère la fonction f dérivable et définie sur IR par : $f(x) = \frac{(x+1)e^x}{1+xe^x}$. .

On note (C) la courbe représentative de *f*.

Partie A

On considère la fonction g dérivable et définie sur IR par : $g(x) = x + 2 - e^x$.

1. a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

b) Calculer $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

2. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

3.a) Démontrer que l'équation (E) : $x \in$ IR, $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions. On note respectivement α et β la plus grande et la plus petite de ces deux solutions.

b) Justifier que $1{,}14 < \alpha < 1{,}15$ et que $-1{,}85 < \beta < -1{,}84$.

4. Démontrer que :

$\forall x \in]-\infty;\alpha[\cup]\beta;+\infty[, g(x) < 0$

$\forall x \in]\alpha;\beta[, g(x) > 0$.

Partie B

On admet que $\forall x \in IR,\ 1 + xe^x > 0$.

1. a) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ puis donner une interprétation graphique des résultats.

2.a) Justifier que $f(\alpha) = \frac{\alpha+2}{\alpha+1}$.

b) En déduire de la question 3-b) un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.

3.a) Démontrer que pour nombre réel *x* :

$f'(x) = \frac{g(x)e^x}{(1+xe^2)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de *f*.

4. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est y = x + 1.

5. Soit la fonction *u* dérivable et définie sur IR par *u*(*x*) = $e^x - xe^x - 1$.

a) Etudier le sens de variation de *u*.

b) En déduire le signe de *u*(x).

c) Démontrer que pour tout nombre réel x :

$f(x) - (x+1) = \frac{(x+1)u(x)}{1+xe^x}$.

d) En déduire la position de (C) par rapport à (T).

6. Tracer (T) et (C).

18 ***Une application de l'exponentielle e*n économie**

Pour suivre et décrire l'évolution de « population à croissance limité », on utilise les fonctions logistiques f du type : $t \longmapsto \frac{a}{1+be^{-kt}}$

où a, b, k sont des constantes positives.
Elles servent par exemple à l'étude d'équipement d'un ménage en automobile, en récepteur TV etc. et ceci en fonction du temps.
1. Justifier que cette fonction est définie sur IR.
2. Etudier la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Etudier f et tracer sa courbe représentative pour a = 8 ; b = 2 et k = 1.

19 **Partie A**

Soit g la fonction définie sur]0 ; $+\infty$[par : $g(x) = \frac{1}{e^{2x}-1}$.
On désigne par (Γ) la courbe représentative de g dans le plan muni du repère orthogonal (O,I,J).
Unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.
2. Étudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variations.
3. Tracer (Γ).

Partie B

On considère la fonction h définie sur]0 ; $+\infty$[par : $h(x) = 2x[a(\ln x)^2 + b\ln x + 2]$, où a et b désignent des nombres réels.
1. Exprimer pour tout x de $]0; +\infty[$, $h'(x)$ en fonction de a et b.
2. Sachant que $h'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$ et $h'(e) = 4$, déterminer a et b.

Partie C

On considère la fonction f définie sur [0 ; $+\infty$[par :
$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = 2x[2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2], \ si\ x > 0 \end{cases}$.
On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthogonal (O,I,J).
1. Etudier la continuité de f en 0.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat.

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

4. Démontrer pour tout x de $]0; +\infty[$, $f'(x) = 2(1 + \ln x)(2\ln x - 1)$.

5. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

6. Soit ϕ la fonction définie sur [0,1; 0,3] par : $\phi(x) = f(x) - g(x)$.
a. Démontrer que, pour tout x appartenant à [0,1; 0,3], on a : $\phi'(x) > 0$.
b. Démontrer que l'équation $f(x) = g(x)$ possède une solution unique α sur [0,1; 0,3].

On admet que (C) est au-dessous de (Γ) sur]0 ;α] et est au-dessus de (Γ) sur [α; $+\infty$[.
7. Tracer (C) dans le même repère que (Γ).

5

FONCTIONS EXPONENTIELLES, FONCTIONS PUISSANCES

COURS 93

TRAVAUX PRATIQUES 98

EXERCICES 99

COMMENTAIRES

● **Ce thème** vise à :

- définir et étudier les fonctions exponentielles et puissances ;
- mettre en place les primitives de fonction de la forme $u'u^{\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\})$.

● **Les fonctions** exponentielles et les fonctions puissances complètent les fonctions étudiées en terminale. Leur champ d'application est vaste et on les retrouve aussi bien en biologie qu'en sciences physiques notamment pour résoudre des équations différentielles.

● **L'étude** des fonctions exponentielles de base a et des fonctions puissances découlent directement de l'étude de la fonction exponentielle népérienne.

On habituera les élèves à retrouver les limites et les dérivées des fonctions exp_a et puissances à partir des définitions de ces fonctions.

● **L'étude** générale des fonctions exp_a n'est pas à traiter de manière théorique mais pourra être abordée sur quelques exemples $(0 < a < 1 \; et \; a > 1)$.

Il en est de même pour les fonctions $x \to x^{\alpha}$. ce sera l'occasion d'étudier des cas correspondant a des valeurs variées de α et de faire le lien avec les notations $\sqrt[n]{x}$ et $x^{p/q}$.

● **Les fonctions** puissances $x \to x^{\alpha}$

sont définies sur $]0;+\infty[$ mais, pour certaines valeurs de α ($\alpha \in \mathbb{Z}, \alpha = \frac{1}{2}\ etc.$), elles peuvent être définies sur un ensemble contenant $]0;+\infty[$ par exemple $\mathbb{R}, \mathbb{R}^{*} ou\ [0;+\infty[$.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES
1. Définition de la fonction exponentielle de base a $(a \in \mathbb{R}^{*+} \setminus \{-1\})$ 2. Définition de la fonction puissance d'exposant réel non nul 3.Primitives de u'u^{m} $(m \in \mathbb{R} - \{-1\})$ 4.Croissance comparée des fonctions logarithme népérien, exponentielle népérienne et puissances 5.Dérivées de fonctions du type $u^{\alpha}(\alpha \in \mathbb{R}^{*})$	☞ Résoudre des équations ou inéquations faisant intervenir des fonctions exponentielles. ☞ Déterminer les primitives d'une fonction du type : $u'u^{m}(m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$. ☞ Utiliser les limites sur la croissance comparée pour calculer d'autres limites.

COURS

I. PUISSANCE D'UN NOMBRE RÉEL STRICTEMENT POSITIF

1. Définition

Pour tout nombre réel strictement positif a et pour tout nombre réel b, On appelle puissance d'exposant b du nombre réel a, le nombre réel noté a^b et défini par $a^b = e^{b\ln a}$.

Remarques

- Pour tout nombre réel $a > 0$ et tout nombre réel b, $a^b > 0$.
- Pour tout nombre réel strictement positif a et pour tout nombre réel b : $\ln a^b = b \ln a$.

Exemples 1

$(5)^{-\sqrt{3}} = e^{-\sqrt{3}\ln 5}$; $13^{\pi} = e^{\pi \ln 13}$; $2^3 = 8$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{5}} = e^{\frac{4}{5}ln\frac{2}{3}}$.

N.B : la touche $\boxed{y^x}$ permet d'obtenir des valeurs approchées de a^b .

Exemple 2

Donner l'arrondi d'ordre 3 de $2^{\sqrt{3}}$.

2. Propriétés

Pour tous nombres réels strictement positifs a et a′ et pour tous nombres réels b et b′, on a :

$1^b = 1$; $a^b a^{b'} = a^{b+b'}$; $(aa')^b = a^b a'^b$;

$\left(a^b\right)^{b'} = a^{bb'}$; $\frac{a^b}{a^{b'}} = a^{b-b'}$; $\frac{a^b}{a'^b} = \left(\frac{a}{a'}\right)^b$.

Exemples

$12^{1-\sqrt{2}} \times 12^{-2+\sqrt{2}} = 12^{-1}$; $\frac{8^{0,3}}{4^{0,3}} = \left(\frac{8}{4}\right)^{0,3} = 2^{0,3}$;

$\left(7^{\frac{2}{3}}\right)^{1,5} = 7^{\frac{2}{3}\times 1,5} = 7^1 = 7$; $Pour\ a > 0\ , \frac{(3a)^{\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{2}}} = \frac{3^{\sqrt{2}}a^{\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{2}}} = 3^{\sqrt{2}}$.

Exercice

Simplifier les écritures suivantes

$5^{2-\sqrt{3}} \times 5^{2+\sqrt{3}}$; $\left(\sqrt{2}\right)^{\pi} \times \left(2\sqrt{2}\right)^{\pi}$; $(9^{-1,25})^{\frac{4}{5}}$; $\frac{\left(\sqrt{10}\right)^{5-a}}{\left(\sqrt{10}\right)^{3-a}}$,$(a \in \text{IR})$; $\frac{(4\pi)^{3.2}}{(2\pi)^{3.2}}$.

II. FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE a

1. Définition

Soit a un nombre réel strictement positif différent de 1
On appelle **fonction exponentielle de base a** la fonction notée $\exp_a$ et définie sur IR par $\exp_a(x) = a^x = e^{x \ln a}$.

Exemples

- *La fonction* $f : x \longmapsto 2^x$ *est la fonction exponentielle de base 2.*
- *La fonction* $f : x \longmapsto \sqrt{5}^x$ *est la fonction exponentielle de base* $\sqrt{5}$.

Remarque
La fonction exponentielle de base *e* est la fonction exponentielle népérienne.

Exercice 1
Résoudre dans IR les équations proposées :
a) $3^x = 5$; b) $2(0{,}1)^{x-1} = 5$; c) $3^x = 3^{x^2}$; d) $4^x - 5 \times 2^x + 6 = 0$.

Exercice 2
Résoudre dans IR les inéquations proposées :
a) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 0{,}05$; b) $3^x \leq 5^{2x+3}$; c) $4^x - 5 \times 2^x + 6 \leq 0$.

2. Dérivée

Propriété

Pour tout nombre réel a strictement positif différent de 1, la fonction $\mathbf{exp_a : x \longmapsto a^x}$ **est dérivable sur IR** et pour tout $x \in$ IR **,** $(\exp_a)'(x) = (\ln a)e^{x \ln a} = (\ln a)a^x$**.**

Exemple

Déterminer la dérivée de $f : x \mapsto \left(\frac{4}{5}\right)^x$.

f peut s'écrire : $\forall x \in IR, f(x) = e^{x ln\left(\frac{4}{5}\right)}$.
f est dérivable sur IR. $\forall x \in IR, f'(x) = \left(ln\left(\frac{4}{5}\right)\right) e^{x ln\left(\frac{4}{5}\right)}$.

3. Limites

Théorème

Soit a un nombre réel strictement positif différent de 1.
- Si $0 < a < 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$.
- Si $a > 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$.

Exemple

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (0{,}3)^x$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (\pi)^x$
$\lim\limits_{x \to +\infty} (0{,}3)^x = 0$ car $0{,}3 \in]0; 1[$. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\pi)^x = +\infty$ car $\pi > 1$.

III. FONCTION PUISSANCE D'EXPOSANT RÉEL NON NUL, CROISSANCES COMPARÉES

1. Définition

Soit α un nombre réel non nul . On appelle fonction puissance d'exposant α, la fonction $\boldsymbol{x \mapsto x^{\alpha}}$.
$\forall x \in]0;+\infty[$, $\boldsymbol{x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}}$.

2. Dérivée

Propriété

La fonction $f : \boldsymbol{x \mapsto x^{\alpha}}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x \in]0;+\infty[$ on a :
$\boldsymbol{f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}}$.

Exercice

Etudier le sens de variation de chacune des fonctions suivantes sur $]0 ; +\infty[$:

a) $f : x \mapsto x^{\sqrt{2}}$; b) g : $x \mapsto x^{-\pi}$.

3. Limites

Théorème

Soit a un nombre réel strictement positif différent de 1.

■ Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^{\alpha} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} = +\infty$

■ Si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^{\alpha} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} = 0$

Exercice

Dans chacun des cas suivants :

1.Calculer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction f.

2. Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

3. Tracer la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

a) $f : x \mapsto x^{0,31}$; *b)* $f : x \mapsto x^{-\pi}$.

4. Croissances comparées des fonctions $\boldsymbol{x \mapsto \ln x}$; $\boldsymbol{x \mapsto e^{x}}$; $\boldsymbol{x \mapsto x^{\alpha}(\alpha > 0)}$

Propriété

Pour tout nombre réel strictement positif α on a :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}}{x^{\alpha}} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{e^{x}} = 0$.

Exemples

Calculer

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-e^x)$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{(1-x)^2}$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-lnx\right)$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(lnx-e^x)$.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-e^x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(1-\frac{e^x}{x^2}\right)$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty$ *(croissance comparée) donc :* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{e^x}{x^2}\right)=-\infty$.

On a $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{e^x}{x^2}\right)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}1=1\end{cases}$ *donc par somme :* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{e^x}{x^2}\right)=-\infty.$

On a $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{e^x}{x^2}\right)=-\infty\end{cases}$ *donc par produit :* $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(1-\frac{e^x}{x^2}\right)=-\infty.$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-e^x)=-\infty.$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{(1-x)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}\frac{1}{\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^2}$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}(-1)=-1$ *donc par somme :* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}-1\right)=-1.$

Par suite : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^2=1.$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^2}=1.$

On a $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^2}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x^2}\right)=+\infty\end{cases}$ *donc par produit :* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}\frac{1}{\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^2}=+\infty.$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-lnx\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{lnx}{x^{\frac{1}{2}}}\right)\sqrt{x}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x^{\frac{1}{2}}}=0$ *(croissance comparée) donc :* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{lnx}{x^{\frac{1}{2}}}\right)=0$.

On a $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{lnx}{x^{\frac{1}{2}}}\right)=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}1=1\end{cases}$ *donc par somme :* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{lnx}{x^{\frac{1}{2}}}\right)=1.$

On a $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{lnx}{x^{\frac{1}{2}}}\right)=1\end{cases}$ *donc par produit :* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{lnx}{x^{\frac{1}{2}}}\right)\sqrt{x}=+\infty.$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-lnx\right)=+\infty.$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(lnx-e^x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{lnx}{e^x}-1\right)e^x$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{lnx}{e^x}=0$ *(croissance comparée).*

On a $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{e^x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -1 = -1 \end{cases}$ *donc par somme :* $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{lnx}{e^x} - 1\right) = -1.$

On a $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{lnx}{e^x} - 1\right) = -1 \end{cases}$ *donc par produit :* $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{lnx}{e^x} - 1\right) e^x = -\infty.$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} (lnx - e^x) = -\infty.$

Exercice

Calculer

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x} - e^x\right)$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 + x - e^{1-x})$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty} ((\ln x)^2 - e^x)$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x^3}$.

Conséquences

Pour tout nombre réel strictement positif α et tout entier naturel non nul n on a :

$\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ >0}} x^\alpha \ln x = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = (3x^2 - x + 1)e^{-x}$.

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 2

Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ >0}} x^2 (\ln x)^3$.

5. Fonction u^α où u est une fonction et α un nombre réel non nul

Théorème 1

Soit α un nombre réel non nul.

Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I alors la fonction u^α est dérivable sur I et a pour dérivée la fonction $\alpha u' u^{\alpha-1}$.

Exemple

Soit f la fonction dérivable sur]1 ;+∞[par : $f(x) = \sqrt[3]{(lnx)^2}$.

Déterminer la dérivée de f.

Pour tout x de]1 ;+∞[, $f(x) = (lnx)^{\frac{2}{3}}$.

Pour tout x de]1 ;+∞[, $f'(x) = \frac{2}{3}\frac{1}{x}(lnx)^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3x}(lnx)^{\frac{-1}{3}}$.

Théorème 2

Soit α un nombre réel non nul et différent de -1.

Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I tel que u' soit continue sur I, alors une primitive sur I de la fonction $u' u^\alpha$ est $\frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1}$.

Exemple

Déterminer une primitive sur IR de la fonction f définie par : $f(x) = e^{-x}.\sqrt[3]{1 + e^{-x}}$.

Pour tout x de IR, $f(x) = e^{-x}(1 + e^{-x})^{\frac{1}{3}}$ *. Posons* $u(x) = 1 + e^{-x}$. $u'(x) = -e^{-x}$, *donc* $f = -u'u^{\frac{1}{3}}$.

Une primitive sur IR de f est donc $F : x \mapsto -\frac{3}{4}(1 + e^{-x})^{\frac{4}{3}}$.

TRAVAUX PRATIQUES

Exercice résolu

Soit f la fonction définie sur IR par : *f(x)* = $\left(\frac{2}{5}\right)^x$.

1. Calculer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction f.
2. Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
3. Tracer la courbe représentative (C) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J).

Solution

$\forall x \in IR, f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x = e^{xln\left(\frac{2}{5}\right)}$.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{xln\left(\frac{2}{5}\right)}$

$On\ a \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} xln\left(\frac{2}{5}\right) = +\infty\ car\ ln\left(\frac{2}{5}\right) < 0 \\ \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty \end{cases}$ $donc \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{xln\left(\frac{2}{5}\right)}$

$On\ a \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} xln\left(\frac{2}{5}\right) = -\infty\ car\ ln\left(\frac{2}{5}\right) < 0 \\ \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0 \end{cases}$ $donc \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0.$

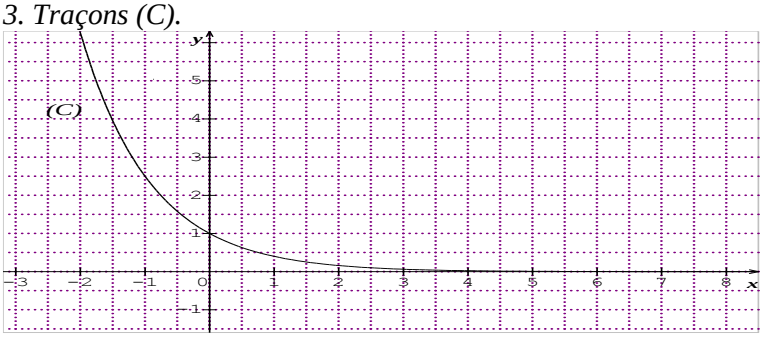
2.$\forall x \in IR, f'(x) = ln\left(\frac{2}{5}\right) e^{xln\left(\frac{2}{5}\right)}$.

$\forall x \in IR, f'(x) < 0\ car\ ln\left(\frac{2}{5}\right) < 0\ et\ \forall x \in IR, e^{xln\left(\frac{2}{5}\right)} > 0.$

D'où f est strictement décroissante sur IR.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	*0*

3. Traçons (C).



EXERCICES

1 Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de f en $+\infty$.

$a)\ f: x \mapsto \dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$.

$b)\ f: x \mapsto \dfrac{x^3+1}{e^x}$.

$c)\ f: x \mapsto e^x - \ln x$.

$d)\ f: x \mapsto (x + x^2 - 3)e^{-x}$.

$e)\ f: x \mapsto e^x - x^3$.

$f)\ f: x \mapsto 5^{\frac{1}{x}}$.

$g)\ f: x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{lnx}$.

$h)\ f: x \mapsto \sqrt{x}e^{-2x}$.

$i)\ f: x \mapsto x - \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

$j)\ f: x \mapsto x - e^{-x}\ln x$.

2 Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de f en 0 .

$a)\ f: x \mapsto \sqrt{x}\ln x$.

$b)\ f: x \mapsto x^3(\ln x)^2$.

c) $f: x \mapsto x^x$.

d) $f: x \mapsto \dfrac{3^x - 2^x}{x}$.

$e)\ f: x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}\ln x$.

$f)\ f: x \mapsto \dfrac{e^{3x}-1}{2x}$.

$g)\ f: x \mapsto \left[ln\left(\dfrac{3}{2}\right)\right]^{\frac{1}{x}}$

$h)\ f: x \mapsto x^2e^{-x^3}$.

$i)\ f: x \mapsto 2x + x^2e^{-2x}$.

3 Dans chacun des cas suivants, calculer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle I indiqué. On admet que f est dérivable sur I.

$a) f: x \mapsto \dfrac{2}{3^x}$, $\quad I = IR.$

$b)\ f: x \mapsto e^{\frac{1}{x}}, I =]0\ ;\ +\infty[$.

$c) f: x \mapsto (x^2+1)^{\sqrt{2}},\ I = IR.$

$d) f: x \mapsto \dfrac{e^x}{4^x},\ I = IR.$

$e)\ f: x \mapsto x^x\ , I =]0\ ;\ +\infty[.$

4 Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de f sur l'intervalle I :

$a) f: x \mapsto \dfrac{2}{3^x},\ I = IR.$

$b) f: x \mapsto 2^{-2x},\ I = IR.$

$c)\ f: x \mapsto (x+1)\sqrt{x^2+2x}\ ,\ I = [0\ ;\ +[\ .$

$d) f: x \mapsto x(x^2+1)^{\sqrt{2}}\ , I = IR.$

$e) f: x \mapsto \dfrac{e^x}{\sqrt{(2e^x+1)^3}}\ , I = IR.$

$f)\ f: x \mapsto \dfrac{(\ln x)^\pi}{x}\ , I =]1\ ;\ +\infty[.$

5 Dans chacun des cas ci-dessous, étudier la fonction f de IR vers IR.

S'inspirer du plan suivant :

a) ensemble de définition D_f;

b) limites aux bornes D_f ;

c) préciser les asymptotes parallèles aux axes lorsqu'elles existent ;

d) représentation graphique.

$a) f: x \mapsto \dfrac{2}{3^x}$

$b) f: x \mapsto (1{,}8)^x$

$c) f: x \mapsto \pi^x$.

$d) f: x \mapsto x^x$.

$e) f: x \mapsto e^{2x} - x^3$.

$f) f: x \mapsto \sqrt{x} - e^x$.

$g) f: x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$.

6 Soit la fonction f dérivable sur IR et définie par : $f(x) = x \times 2^x$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ,I ,J) d'unité graphique 2 cm.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Interpréter graphiquement le résultat.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

Interpréter graphiquement les résultats.

2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

3. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

4. Tracer (C) et (T).

6

CALCUL INTÉGRAL

COURS 102

TRAVAUX PRATIQUES 108

EXERCICES 114

COMMENTAIRES

● **Ce thème** vise à :

► calculer des intégrale à l'aide de techniques particulières (utilisation des primitives, intégration par parties) ;

► réinvestir dans les calculs d'aires les techniques du calcul intégral.

● La notion de calcul intégral est nouvelle en terminale.

Elle est introduire à partir de celle de primitive. Aussi, le professeur veillera à ce que cette dernière notion soit acquise par les élèves. Le calcul intégral est un outil qui permettra de nouveau de déterminer des primitives de fonctions. Il permettra en outre de calculer les aires des surfaces planes ou d'en donner une valeur approchée. Cet outil sera réinvesti en physique (volume, moment d'inertie d'un solide, etc.).

Toutes les fonctions considérées sont continues sur leur intervalle d'intégration.

Il faut faire le lien entre intégrales et aire dès l'introduction des intégrales ou tout de suite après la définition. Cela permet alors d'illustrer graphiquement les propriétés de l'intégrale.

● Lors d'une évaluation, si le calcul d'une intégrale utilise une intégration par parties, l'énoncé devra l'indiquer.

● A l'occasion d'un calcul d'aire, l'unité attendue doit être précisée dans l'énoncé.

● On pourra calculer, sur des exemples, une valeur approchée d'une intégrale par la méthode des rectangles. La méthode des rectangles n'est pas à évaluer.

● L'inégalité de la moyenne et la valeur moyenne d'une fonction sont hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES
1. Définition de l'intégrale d'une fonction continue f $\int_a^b f(t)dt$ = F(b) - F(a) où F est une primitive de f 2. La fonction $x \to \int_a^x f(t)dt$ 3. Interprétation graphique de l'intégrale d'une fonction continue positive 4. Propriétés : - linéarité ; - relation de Chasles ; - positivité ; - si $f \leq g \ sur \ [a,b]$ $alors \ \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$ 5.Techniques de calcul d'une intégrale : - utilisation des primitives ; - intégration par parties .6.Application : calcul d'aire	☞ Calculer une intégrale en utilisant : - les primitives des fonctions usuelles ; - une intégration par parties. ☞ Utiliser la relation de Chasles pour simplifier un calcul intégral. ☞ Connaissant un encadrement d'une fonction f sur [a ; b], trouver un encadrement de $\int_a^b f(t)dt$. ☞ Calculer l'aire d'une partie du plan limitée par : - la courbe représentative d'une fonction, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a \ et \ x = b$; - les courbes représentatives de deux fonctions et les droites d'équation $x=a$ *et* $x=b$.

COURS

I. INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE

Activité

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux nombres rééels de I.
Soit F et G deux primitives de f sur I.
Démontrer que F(b) – F(a) = G(b) – G(a).
Le nombre F(b) – F(a) est donc indépendant de la primitive choisie.

1. Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant deux nombres réels *a* et *b*, F une primitive quelconque de f sur I .
Le nombre réel F(*b*) – F(*a*) est appelé intégrale de *a* à *b* de *f*.

Notation : F(*b*) – F(*a*) se note $\int_a^b f(t)dt$

Remarques

■ $\int_a^b f(t)dt$ se lit aussi intégrale (ou somme) de *a* à *b* de *f* (*t*)*d t*

■ *a* et *b* sont appelés les bornes de l'intégrale.

■ le nombre réel F(*b*) - F(*a*) se note aussi $[F(t)]_a^b$ [et se lit F (*t*) pris entre *a* et *b*

■ On peut remplacer la variable *t* par toute autre lettre alphabétique sauf par les lettres désignant les bornes : On dit que t est une variable muette.

ainsi $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(x)dx$ …

Exemple 1

Soit la fonction *f* définie sur IR par $f(x) = 3x^2 + 3$.
Calculer l'intégrale de 0 à 1 de *f*.

Solution

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (3x^2+3)dx = \left[x^3+3x\right]_0^1 = (1^3+3\times1) - (0^3+3\times0) = 4$$

Exemple 2

Soit *f* définie sur IR, par $f(x) = \frac{-x}{(x^2+2)^2}$ .Calculer $\int_{-1}^1 f(x)dx$ et $\int_4^2 f(x)dx$

Solution

Soit $u(x) = x^2 + 2$. *on a* $u'(x) = 2x$. $f(x) = -\frac{1}{2}\frac{u'(x)}{(u(x))^2}$.

La fonction F définie sur IR par : $F(x) = \frac{1}{2(x^2+2)}$ *est une primitive de* f *sur IR. Ainsi, on a :*

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \left[\frac{1}{2(x^2+2)}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0.$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \left[\frac{1}{2(x^2+2)}\right]_4^2 = \frac{1}{2(2^2+2)} - \frac{1}{2(4^2+2)} = \frac{1}{18}.$$

Exercice 1

1. Justifier que la fonction *h* définie sur $]0;+\infty[$, par : $h(x) = \frac{2}{7}x^3\sqrt{x}$ est une primitive de la fonction *g* définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x^2\sqrt{x}$.

2. Calculer $\int_4^1 g(x)dx$.

Exercice 2

Calculer l'intégrale $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$.

2. Interprétation graphique de l'intégrale d'une fonction continue

Propriété

(O, I, J) est un repère orthogonal du plan.

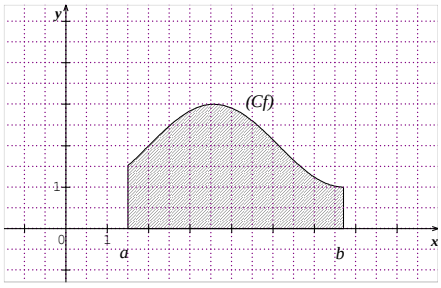
Soit a et b deux nombres réels tels que $a \leq b$ et f une fonction continue sur $[a,b]$

(C) la courbe représentative de f , Δ la partie *du plan limitée par* (C), (OI) et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$.

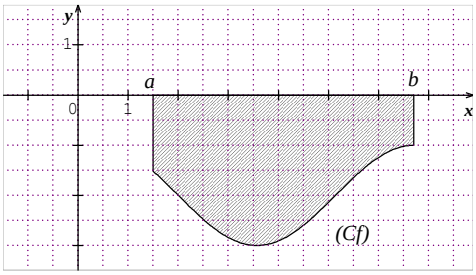
L'unité d'aire notée u.a est égale à OI×OJ.

Si $f \geq 0$ *sur* $[a\,;b]$ alors l'aire de Δ en unité d'aire (u.a) est $\int_a^b f(x)dx$.

Si $f \leq 0$ *sur* $[a\,;b]$ alors l'aire de Δ en unité d'aire (u.a) est $\int_a^b [-f(x)]dx$.



$$A = \int_a^b f(x)dx$$



$$A = -\int_a^b f(x)dx$$

Exemple

On considère le plan rapporté au repère orthogonal (O,I, J) tel que OI = 1cm et OJ = 2 cm

Soit la fonction *f* définie sur] 0 ; +∞[par : $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + 2$ et (C) sa courbe représentative.

Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en u.a et en cm^2 de la partie du plan délimitée par (C), la droite (OI) et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 4$.

Solution

f *est une fonction continue et positive sur* $[1\,;4]$*donc l'aire en unité d'aire est :*

$\mathcal{A} = \int_1^4 (\frac{2}{\sqrt{x}} + 2)dx = [\,4\sqrt{x} + 2x\,]_1^4 = 10$ *u.a*

u.a en cm² est $2\times 1\ cm^2$ *. D'où* $\mathcal{A} = 20\ cm^2$.

Exercice

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 2 cm.
Dans chacun des exercices 1 à 3 , calculer en u.a puis en cm², l'aire de la partie du plan limitée par la courbe représentative de la fonction f, la droite (OI) et les droites d'équations respectives $x = a$ *et* $x = b$.

1 $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; $a = 0$ *et* $b = 1$.

2 $f : x \mapsto -x^2(x^3+1)$; $a = -1$ et $x = 0$.

3 $f : x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{x+1}$; $a = e - 1$ et $b = e^2 - 1$.

II. PROPRIETES

1. Propriétés

f et g sont des fonctions continues sur un intervalle I et a , b, c des nombres réels de I.

$\int_a^a f(x)dx = 0.$

$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$

$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ ***(relation de Chasles).***

$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ ***(linéarité)***

k étant un nombre réel quelconque : $\int_a^a kf(x)dx = k\int_a^a f(x)dx$ ***(linéarité)***

Exemple

Calculer $\int_{-4}^{4} |x+3|dx$

Solution

$\forall x \in [-4\,;-3]$, $|x+3| = -x-3$ *et* $\forall x \in [-3\,;4]$, $|x+3| = x+3$.

$\int_{-4}^{4} |x+3|dx = \int_{-4}^{-3}(-x-3)dx + \int_{-3}^{4}(x+3)dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 - 3x\right]_{-4}^{-3} + \left[\frac{1}{2}x^2 + 3x\right]_{-3}^{4} = 16$.

2. Intégrale et primitive

Soit f est une fonction continue sur un intervalle I et a un nombre réel de I.

Propriété

La fonction *F*: $x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f sur I qui s'annule en *a*.

Conséquence

Si F est définie sur I par F(x) = $\int_a^x f(t)dt$ alors $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

Exemple 1

Pour tout nombre réel x, strictement positif, $lnx = \int_1^x \frac{1}{t}dt$.

Exemple 2

Soit F la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}dt$.

Etudier le sens de variation de F.

F est la primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{\ln x}{1+x^2}$ *sur* $]0;+\infty[$*, qui s'annule en 1.*

Donc $\forall x \in]0;+\infty[$ *:* $F'(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$.

$\forall x \in]0;+\infty[, 1+x^2 > 0$, *donc* $F'(x)$ *a le signe de* lnx .

Par suite :

$\forall x \in]0;1[, F'(x) < 0$ *et* $\forall x \in]1;+\infty[, F'(x) > 0$.

Donc F est strictement décroissante sur $]0;1]$ *et strictement croissante sur* $[1;+\infty[$.

Exercice

Soit F la fonction définie sur IR par : $F(x) = \int_0^x (t^2-1)e^{-2t}dt$.

Etudier le sens de variation de F.

3. Intégrales et inégalités

f et g sont des fonctions continues sur un intervalle fermé $[a;b]$ *:*

Si $f \geq 0$ sur $[a\,;b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Si $f \leq 0$ sur $[a\,;b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

Si $f \leq g$ sur $[\,a\,;b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Exemple

1. Démontrer que : $\forall\, x \in [0;1], 0 \leq \frac{x^2}{1+x} \leq x^2$.

2. En déduire un encadrement de l'intégrale $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx$.

1. $\forall x \in [0;1], 1+x>0$ *et* $x^2 \geq 0$ *donc* $\forall x \in [0;1], \frac{x^2}{1+x} \geq 0$ *(1)*

Soit $x \in [0;1]$.

On a : $\frac{x^2}{1+x} - x^2 = -\frac{x^3}{1+x}$.

On a : $1+x>0$ *et* $-x^3 \leq 0$ *donc* $-\frac{x^3}{1+x} \leq 0$ *(2).*

D'après (1) et (2), on a $\forall x \in [0;1], 0 \leq \frac{x^2}{1+x} \leq x^2$.

2. En intégrant l'inégalité ci-dessus, on a $0 \leq I \leq \int_0^1 x^2 dx$.

$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.

Il vient $0 \leq I \leq \frac{1}{3}$.

III. INTÉGRATION PAR PARTIES

Théorème

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, tels que u' et v' soient continues sur I.
Pour tous nombres réels a et b de I, on a :
$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$.

Exemples

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties.

a) $\int_0^{\pi}(x+1)\cos x dx$; b) $\int_1^e t^2 \ln t\, dt$.

Solution

a)En posant : $\begin{cases} u(x) = x+1 \\ v'(x) = cosx \end{cases}$ *on a :* $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \sin x \end{cases}$

Par suite $\int_0^{\pi}(x+1)\,cosxdx = [(x+1)sinx]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} sinxdx = 0 - [-cosx]_0^{\pi} = -2.$

b) *En posant :* $\begin{cases} u(t) = lnt \\ v'(t) = t^2 \end{cases}$ *on a :* $\begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t} \\ v(t) = \frac{1}{3}t^3 \end{cases}$

Par suite $\int_1^e t^2\, ln\, t\, dt = \left[\frac{1}{3}t^3\, ln\, t\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{3}t^2 dt = \frac{e^3}{3} - \left[\frac{t^3}{9}\right]_1^e = \frac{2e^3+1}{9}$.

Exercice

A l'aide de deux intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes :

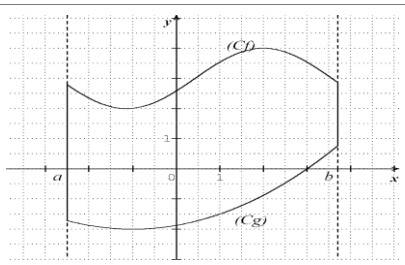
$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(-3x^2)\cos x\, dx$; $J = \int_0^1 (x^2 - x + 1)e^{1-x} dt$.

IV. CALCUL D'AIRE

Le plan est rapporté à un repère orthogonal (O, I, J).

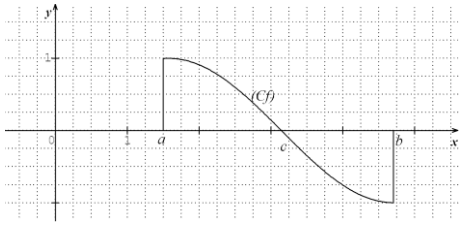
Propriété

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle fermé $[a\,;b]$ telles que $f \geq g$ sur $[a\,;b]$.
C_f et C_g sont les courbes respective de et g .
L'aire en u.a de la partie du plan limitée par C_f , C_g et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$
est $\int_a^b (f(x) - g(x))dx$.



Conséquence

Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$ et c un élément de $[a\,;b]$ tel que :
$f \geq 0$ sur$[a\,;c]$ et $f \leq 0$ sur $[c\,;b]$
L'aire en u.a de la partie du plan limitée par (C_f), la droite (OI) et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$ est
$\int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$.



Exemple

Soit f la fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par $f(x) = \frac{x}{2} - 1 - \frac{2\ln x}{x}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) Unité graphique : 2 cm.
Sot (D) la droite d'équation $y = \frac{x}{2} - 1$.
Calculer l'aire en $\mathcal{A}$ en cm² de la partie du plan délimitée par (C), la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$.

$\forall x \in]0;+\infty[, f(x) - \left(\frac{x}{2} - 1\right) = -\frac{2\ln x}{x}$.
$\forall x \in [1;e], f(x) - \left(\frac{x}{2} - 1\right) \leq 0$.
On peut donc conclure que (C) est au-dessous de (D) sur $[1;e]$.
$\mathcal{A} = 4\int_1^e \left(\left(\frac{x}{2} - 1\right) - f(x)\right)dx = 4\int_1^e \frac{2\ln x}{x}dx = [4(\ln x)^2]_1^e = 4e$.

Exercices

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).
Dans les exercices 1 à 3, calculer l'aire de la partie du plan limitée par les courbes représentatives (C_f) et (C_g) des fonctions f et g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

1 $f: x \mapsto x^3 + 1$; $g: x \mapsto x^2 - 1$; a = -1 et b = 1.

2 $f: x \mapsto x^2 lnx$; $g: x \mapsto xlnx$; a = $\frac{1}{e}$ et b = 1. (On pourra utiliser une intégration par parties)

3 $f: x \mapsto e^{-2x}$; $g: x \mapsto 2e^{-x}$; a = -1 et b = 0.

TRAVAUX PRATIQUES

Exercice résolu 1

Calculer les intégrales suivantes

a) $\int_1^9 (\frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2x^2})dx$;

b) $\int_{1-e}^{1-e^2} \frac{\ln(1-x)}{1-x} dx$;

c) $\int_1^{\frac{e}{2}} \frac{1}{x\ln(2x)} dx$;

d) $\int_0^1 x^2 e^{1-x^3}\, dx$;

e) $\int_0^{ln2} 2e^{2x}\sqrt{1+e^{2x}}\, dx$.

Solution

a) On a $\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [\,2\sqrt{x}]_1^9 = 4$ *et* $\int_1^9 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^9 = \frac{8}{9}$.

Donc $\int_1^4 (\frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2x^2})dx = 3\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{1}{x^2} dx = (3\times 4) + \left(\frac{1}{2}\times\frac{8}{9}\right) = \frac{112}{9}$.

b) $\int_{1-e}^{1-e^2} \frac{ln(1-x)}{1-x} dx$

En posant $u(x) = ln(1-x)$, *nous avons* $u'(x) = \frac{-1}{1-x}$ *donc* $\frac{ln(1-x)}{1-x} = -u'(x)u(x)$.

$-\frac{1}{2}u^2$ *est une primitive de* $-u'u$.

Ainsi : $\int_{1-e}^{1-e^2} \frac{ln(1-x)}{1-x} dx = -\frac{1}{2}[ln^2(1-x)]_{1-e}^{1-e^2}$, *soit* $\int_{1-e}^{1-e^2} \frac{ln(1-x)}{1-x} dx = -\frac{3}{2}$.

c) $\int_1^{\frac{e}{2}} \frac{1}{xln(2x)} dx$

Pour tout $x \in \left[1;\frac{e}{2}\right]$, $\frac{1}{xln(2x)} = \frac{\frac{1}{x}}{ln2x}$.

En posant $u(x) = ln(2x)$, *nous avons* $u'(x) = \frac{1}{x}$ *donc* $\frac{1}{xln(2x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

$ln|u|$ *est une primitive de* $\frac{u'(x)}{u(x)}$.

Ainsi : $\int_1^{\frac{e}{2}} \frac{1}{xln(2x)} dx = [ln(ln2x)]_1^{\frac{e}{2}}$, *soit* $\int_1^{\frac{e}{2}} \frac{1}{xln(2x)} dx = -ln(ln2)$.

d) $\int_0^1 x^2 e^{1+x^3}\, dx$

En posant $u(x) = 1+x^3$, *nous avons* $u'(x) = 3x^2$ *donc* $x^2 e^{1+x^3} = \frac{1}{3}u'(x)e^{u(x)}$.

$\frac{1}{3}e^u$ *est une primitive de* $\frac{1}{3}u'e^u$.

Ainsi : $\int_0^1 x^2 e^{1+x^3}\, dx = \frac{1}{3}\left[x^2 e^{1+x^3}\right]_0^1$, *soit* $\int_0^1 x^2 e^{1+x^3}\, dx = \frac{e^2}{3}$.

e) $\int_0^1 2e^{2x}\sqrt{1+e^{2x}}\,dx$

En posant $u(x)=1+e^{2x}$, *nous avons* $u'(x)=2e^{2x}$ *donc* $2e^{2x}\sqrt{1+e^{2x}}=u'(x)(u(x))^{\frac{1}{2}}$.
$\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}$ *est une primitive de* $u'u^{\frac{1}{2}}$.

Ainsi : $\int_0^{ln2} 2e^{2x}\sqrt{1+e^{2x}}\,dx=\frac{2}{3}\left[(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}\right]_0^{ln2}$, *soit* $\int_0^{ln2} 2e^{2x}\sqrt{1+e^{2x}}\,dx=\frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{2}$.

Exercice résolu 2

Calculer chaque intégrale à l'aide d'une intégration par parties.

a) $\int_1^e \frac{lnx}{x^3}dx$;

b) $\int_0^1 (x-1)e^{1-x}\,dx$;

c) $\int_2^3 \ln(2x+1)\,dx$.

Solution

a) $\int_1^e \frac{lnx}{x^3}dx$

Posons $\begin{cases} u(x)=lnx \quad , d'où \quad u'(x)=\frac{1}{x} \\ v'(x)=\frac{1}{x^3} \quad , d'où \quad v(x)=-\frac{1}{2x^2} \end{cases}$

Toutes ces fonctions étant continues sur $[1;e]$, *nous avons ;*

$\int_1^e \frac{lnx}{x^3}dx=\left[-\frac{lnx}{2x^2}\right]_1^e+\int_1^e \frac{1}{2x^3}dx=-\frac{1}{2e^2}+\left[-\frac{1}{4x^2}\right]_1^e=-\frac{1}{2e^2}+\left(-\frac{1}{4e^2}+\frac{1}{4}\right)$.

Finalement, $\int_1^e \frac{lnx}{x^3}dx=-\frac{3}{4e^2}+\frac{1}{4}$.

b) $\int_0^1 (x-1)e^{1-x}\,dx$

Posons $\begin{cases} u(x)=x-1 \quad , d'où \quad u'(x)=1 \\ v'(x)=e^{1-x} \quad , d'où \quad v(x)=-e^{1-x} \end{cases}$

Toutes ces fonctions étant continues sur $[0;1]$, *nous avons ;*

$\int_0^1 (x-1)e^{1-x}\,dx=[(1-x)e^{1-x}]_0^1+\int_0^1 e^{1-x}\,dx=-e+[-e^{1-x}]_0^1=-e+(-1+e)$.

Finalement, $\int_0^1 (x-1)e^{1-x}\,dx=-1$.

c) $\int_2^3 ln(2x+1)\,dx$

Posons $\begin{cases} u(x)=ln(2x+1) \quad , d'où \quad u'(x)=\frac{2}{2x+1} \\ v'(x)=1 \quad , d'où \quad v(x)=x+\frac{1}{2} \end{cases}$

Toutes ces fonctions étant continues sur $[2;3]$, *nous avons ;*

$\int_2^3 ln(2x+1)\,dx=\left[(x+\frac{1}{2})ln(2x+1)\right]_2^3-\int_2^3 dx=\frac{7}{2}ln7-\frac{5}{2}ln5-[x]_0^1=\frac{7}{2}ln7-\frac{5}{2}ln5-(1-0)$.

Finalement, $\int_2^3 ln(2x+1)\,dx=\frac{7}{2}ln7-\frac{5}{2}ln5-1$.

Exercice résolu 3

Soit I = $\int_0^t x(x+1)e^{2x}\,dx$ où t est un nombre réel strictement positif .

Calculer I à l'aide d'intégrations par parties successives.

Solution

Posons $\begin{cases} u(x) = x(x+1) \quad , \ d'où \quad u'(x) = 2x+1 \\ v'(x) = e^{2x} \quad , d'où \quad v(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

Toutes ces fonctions étant continues sur $[0;t]$*, nous avons :*

$I = \left[\frac{1}{2}x(x+1)e^{2x}\right]_0^t - \int_0^t \left(x+\frac{1}{2}\right)e^{2x}dx = \frac{1}{2}t(t+1)e^{2t} - \int_0^t \left(x+\frac{1}{2}\right)e^{2x}dx$.

Effectuons une nouvelle intégration par parties pour calculer $\int_0^t \left(x+\frac{1}{2}\right)e^{2x}dx$.

Posons $\begin{cases} u(x) = x+\frac{1}{2} \quad , \ d'où \quad u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{2x} \quad , d'où \quad v(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

Ces fonctions étant continues sur [0 ;t], on obtient :

$\int_0^t \left(x+\frac{1}{2}\right)e^{2x}dx = \left[\frac{1}{2}(x+\frac{1}{2})e^{2x}\right]_0^t - \int_0^t \frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{1}{2}(t+\frac{1}{2})e^{2t} - \frac{1}{4} + \left[-\frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^t = \frac{1}{2}(t+\frac{1}{2})e^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t}$.

Finalement, $I = \frac{1}{2}t(t+1)e^{2t} - \frac{1}{2}(t+\frac{1}{2})e^{2t} + \frac{1}{4}e^{2t}$ *, soit* $I = \frac{t^2e^{2t}}{2}$.

Exercice résolu 4

A l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive de la fonction ln .

Solution

La fonction F définie sur $]0;+\infty[$ *par* $F(x) = \int_1^x lntdt$ *est une primitive de ln.*

Posons $\begin{cases} u(t) = lnt \quad , \ d'où \quad u'(t) = \frac{1}{t} \\ v'(t) = 1 \quad , d'où \quad v(t) = t \end{cases}$

Toutes ces fonctions étant continues sur $]0;+\infty[$*, nous avons ;*

$\int_1^x lnt\,dt = [tlnt]_1^x - \int_1^x dt = xlnx - [t]_1^x$.

Finalement, $F(x) = xlnx - x + 1$.

Exercice résolu 5

1. Etablir que pour tout nombre réel $x \geq 1$, on a : $x \leq \sqrt{x^2+1} \leq x + \frac{1}{2x}$.

2. En déduire un encadrement de $\int_1^2 \sqrt{x^2+1}dx$.

Solution

1.*Pour tout* $x \geq 1$*, on a :* $x^2 \leq x^2+1$ *, par suite* $x \leq \sqrt{x^2+1}$ *(1)*

Pour tout $x \geq 1$*, on a :*

$\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 - \left(x+\frac{1}{2x}\right)^2 = -\frac{1}{4x^2}$*, or* $-\frac{1}{4x^2} < 0$ *donc* $\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 - \left(x+\frac{1}{2x}\right)^2 < 0$.

Par suite, $\sqrt{x^2+1} < x + \frac{1}{2x}$ (2)

On déduit de (1) et (2) que : $\forall x \geq 1$*, on a:* $\leq \sqrt{x^2+1} \leq x + \frac{1}{2x}$.

2. $\forall x \geq 1$*, on a:* $\leq \sqrt{x^2+1} \leq x + \frac{1}{2x}$ *donc* $\int_1^2 xdx \leq \int_1^2 \sqrt{x^2+1}\,dx \leq \int_1^2 (x+\frac{1}{2x})dx$

Soit $\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 \leq \int_1^2 \sqrt{x^2+1}\,dx \leq \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}lnx\right]_1^2$.

Finalement, $\forall x \geq 1, on\ a$: $\frac{3}{2} \leq \int_1^2 \sqrt{x^2+1}\,dx \leq \frac{3}{2} + \frac{ln2}{2}$.

Exercice résolu 6

Soit f la fonction dérivable sur IR et définie par $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{2x} + \frac{1}{2}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) Unité graphique : 2 cm

1. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}$ est asymptote à (C) en $-\infty$.

2. Calculer les limites de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Interpréter graphiquement les résultats.

3. Pour tout nombre réel x, calculer $f'(x)$

4.Etudier les variations de f, puis dresser son tableau de variation

5. Etudier la position de (C) par rapport à (D).

6. Construire (C) et (D).

7. Soit un nombre réel t tel que $t < 0$

On désigne par $A(t)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par (C), la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ et les droites d'équations respectives $x = t$ et $x = 0$.

a) Calculer $A(t)$ à l'aide d'une intégration par parties .

b) Calculer $\lim\limits_{t\to-\infty} A(t)$.

Solution

1. D*émontrons la droite (D) d'équation* $y = \frac{1}{2}$ *est asymptote à (C) en* $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x) - \frac{1}{2}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(x - \frac{1}{2}\right)e^{2x} = \lim_{x\to-\infty} xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}$$

On a :

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty\ et\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0\ \ donc\ \ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{2x} = \lim\limits_{X\to-\infty} \frac{1}{2} X\, e^X = 0 \quad avec\ le\ changement\ de\ variable\ X = 2x.$

En faisant la somme des limites précédentes, on obtient :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x) - \frac{1}{2}\right) = 0$$

Par conséquent, la droite (D) est asymptote à (C) en -∞.

2. Limites de $f(x)$ ***et de*** $\frac{f(x)}{x}$ ***lorsque x tend vers*** $+\infty$**.**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x - \frac{1}{2}\right)e^{2x} + \frac{1}{2}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x - \frac{1}{2}\right) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = +\infty\ \ car\ \ \lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty\ et\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = +\infty.$

En faisant le produit des limites précédentes, on obtient :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}(1-\frac{1}{2x})e^{2x}+\frac{1}{2x}$$

On a : $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0.$

$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)=1$ *et* $\lim_{x\to+\infty}e^{2x}=+\infty$ *donc par produit des limites, on a :*

$\lim_{x\to-\infty}\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{2x}=+\infty.$

En faisant la somme des limites précédentes, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty.$$

Interprétation graphique

(C) admet en +∞ une branche parabolique de direction (OJ)

3.Calcul de f'(x)

Pour tout nombre réel x, $f'(x)=e^{2x}+2\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{2x}=2xe^{2x}$.

4. Etude des variations de f

$\forall x\in IR$, $2e^{2x}>0$ *alors le signe de* $f'(x)$ *est celui de x .D'où :*$\forall x\in\ ]-\infty;0[$, $f'(x)<0$ *et* $\forall x\in\ ]0;+\infty[$, $f'(x)>0$.

Par conséquent, f *est strictement croissante sur [0 ; +∞[et strictement décroissante sur* $]-\infty\ ;\ 0]$.

Tableau de variations de f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↘	0	↗	$+\infty$

5. Position relative de (C) et (D)

Pour tout nombre réel x, on a $f(x)-\frac{1}{2}=\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{2x}$

Pour tout nombre réel x, $e^{2x}>0$ *donc* $f(x)-\frac{1}{2}$ *a le signe de* $x-\frac{1}{2}$.

Ainsi, Pour tout $x\in\left]-\infty\ ;\ \frac{1}{2}\right[$, $f(x)-\frac{1}{2}<0$ *et pour tout* $x\in\left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$, $f(x)-\frac{1}{2}>0$

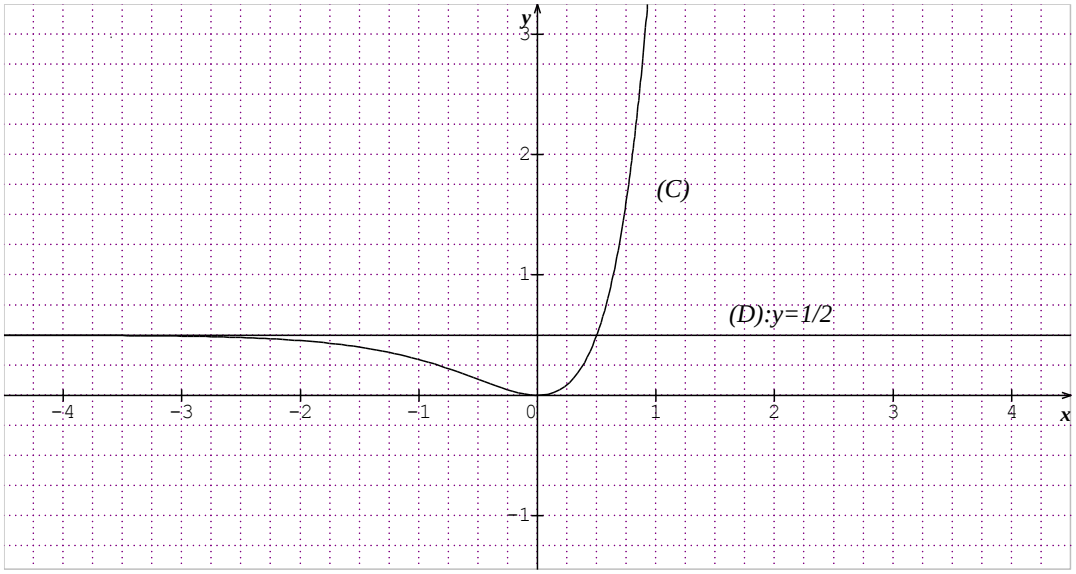
Par ailleurs, $f(x)-\frac{1}{2}=0$ *pour* $x=\frac{1}{2}$.

Il s'en suit que :

(C) est au-dessous de (D) sur $\left]-\infty\ ;\ \frac{1}{2}\right[$ *et (C) est au-dessus de (D) sur* $\left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$

(C) et (D) se coupent au point d'abscisse $\frac{1}{2}$

6-Construction de (C)



7.a) Calcul de $A(t)$ *à l'aide d'une intégration par parties*

On a $A(t) = 4\int_t^0 \left(\frac{1}{2} - f(x)\right)dx = 4\int_t^0 \left[-\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]e^{2x}$

En posant : $\begin{cases} u(x) == -\left(x-\frac{1}{2}\right) \\ v'(x) = e^{2x} \end{cases}$ *on a :* $\begin{cases} u'(x) = -1 \\ v(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

On a : $\int_t^0 \left[-\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]e^{2x}dx = \left[-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{2x}\right]_t^0 - \int_t^0 \left(-\frac{1}{2}e^{2x}\right)dx$

$$= \left[-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{2x}\right]_t^0 + \left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_t^0$$

Soit $\int_t^0 \left[-\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]e^{2x}\,dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(t-1)e^{2t}$

D'où $A(t) = 2 + 2(t-1)e^{2t}cm^2$

$b)$ $\lim\limits_{t\to-\infty} A(t) = \lim\limits_{t\to-\infty}(2 + 2(t-1)e^{2t}) = \lim\limits_{t\to-\infty}(2 + 2te^{2t} - 2e^{2t})$

On a : $\lim\limits_{t\to-\infty} 2t = -\infty$ *et* $\lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0$ *donc* $\lim\limits_{t\to-\infty} e^{2t} = 0$

$\lim\limits_{t\to-\infty} 2t\boldsymbol{e^{2t}} = \lim\limits_{T\to-\infty} T\boldsymbol{e^{T}} = 0$ $(par\ le\ changement\ de\ variable\ T = 2t)$

$D'o\grave{u}$ $\lim\limits_{t\to-\infty} A(t) = 2\ cm^2.$

EXERCICES

1 Vérifier les calculs suivants

$a)\int_1^4 \frac{1}{t^2}dt = \frac{3}{4}$; $b)\int_4^9 \frac{1}{2\sqrt{t}}dt = 1$;

$c)\int_{-1}^0 e^t dt = \frac{e-1}{e}$; $d)\int_1^e \frac{1}{t}dt = 1$;

$e)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin t)dt$ = -1.

2 Calculer les intégrales suivantes

$a)\int_2^1 (\frac{1}{t^2}-3)dt$; $b)\int_4^9 (\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{1}{t})dt$;

$c)\int_0^1 (\sqrt{t}-3t)dt$; $d)\int_0^{\pi} \cos(3t)dt$.

3 *Forme* $u'v+uv'$ *ou* $\frac{u'v-v'u}{v^2}$

Calculer les intégrales suivantes :

$a)\int_0^{\pi} (\sin t + t\cos t)dt$;

$b)\int_1^e (2x\ln x + x)dx$;

$c)\int_0^1 (2xe^x + x^2e^x)dx$

$d)\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t + t\sin t}{\cos t^2}dt$;

$e)\int_1^e (\frac{-\ln x+1}{x^2})dx$

$f)\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{-1}{\sin^2 t})dt$;

$g)\int_0^1 (\frac{1-2x}{e^{2x}})dx$.

4 Calculer les intégrales suivantes

$*a)\int_2^1 \frac{2}{\sqrt{2t-1}}dt$;

$*b)\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{4-3t}}dt$;

$c)\int_1^2 \frac{t^2+1}{\sqrt{t^3+3t}}dt$;

$d)\int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{9-t^2}}dt$

$e)\int_0^1 3x^2(x^3+1)dx$

$f)\int_{-2}^1 x^3(x^4+1)dx$

$*g)\int_0^1 (x+1)(x^2+2x)^3 dx$

$*h)\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$;

$*i)\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}dx$;

$j)\int_0^{\ln 2} e^x(e^x+3)^4 dx$;

$*k)\int_0^1 \frac{-4}{3+4x}dx$;

$l)\int_{-2}^{-1} \frac{2}{1-5x}dx$;

$m)\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+4x+4}dx$

$n)\int_2^3 \frac{x}{1-x^2}dx$;

$o)\int_{-1}^0 \frac{e^t}{1+e^t}dx$

$p)\int_{-2}^0 \frac{-3}{(3-3x)^2}dx$;

$q)\int_0^1 \frac{1}{(3+4x)^3}dx$

$r)\int_{-1}^1 \frac{x^2+1}{(x^3+3x+1)^3}dx$;

$t)\int_0^1 \frac{x+3}{(x^2+6x+7)^5}dx$

$u)\int_0^1 3\sqrt{3x+1}dx$;

$v)\int_0^1 \sqrt{x+1}dx$;

$w)\int_0^1 (x+1)\sqrt{x^2+2x}dx$;

$z)\int_{-1}^1 x\sqrt{x^2-1}dx$.

5 En utilisant la propriété de Chasles , calculer les intégrales suivantes.

$\int_{-1}^1 (3x^2-|x|)dx$; $\int_0^4 2-|x-3|dx$;

$\int_{-3}^3 \sqrt{x^2+4x+4}dx$; $\int_{\frac{1}{2}}^2 |\ln x|dx$.

6 Soit f la fonction définie sur

$]1;+\infty[$ $par: f(x) = \frac{4}{x} - \frac{1}{x\ln x}$.

1. Justifier que : $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}dx = \ln 2$.

2 .En déduire l'intégrale $\int_e^{e^2} f(x)dx$.

7 Soit f la fonction définie sur

$[1;+\infty[$ $par: f(x) = \frac{3x+1}{3x-1}$.

1.Vérifier que pour tout $x \geq 1$,

$f(x) = 1 + \frac{2}{3x-1}$.

2. Calculer $\int_1^4 f(x)dx$.

8 Soit h la fonction définie sur $\left]-\frac{2}{3}\ ;\ +\infty\right[$ par

$h(x) = \frac{6x^2+13x+4}{3x+2}$.

1. Déterminer les nombres réels a , b et c tels pour tout $x > -\frac{2}{3}$, $h(x) = ax+b+\frac{c}{3x+2}$.

2. Calculer $\int_0^2 h(x)dx$.

9 1. Calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{4}{4x^2+4x+1}dx$.

2.a) Déterminer les nombres réels a, b tels pour tout $x \neq -\frac{1}{2}$,

$\frac{2x+5}{4x^2+4x+1} = \frac{a}{2x+1} + \frac{b}{(2x+1)^2}$.

b) Calculer $\int_0^1 \frac{2x+5}{4x^2+4x+1}dx$.

10 Soit $f$la fonction définie sur IR par :

$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

1. Démontrer que pour tout

$x \in [1;2]$, $\frac{1}{5} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$.

2. En déduire un encadrement de $\int_1^2 f(x)dx$.

11 Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$g(x) = e^{-x}\ln x$.

1. Démontrer que pour tout $x \in [1;2]$,

$0 \leq g(x) \leq e^{-x}\ln 2$.

2 . En déduire un encadrement de $\int_1^4 g(x)dx$.

12 1. Soit x un nombre réel.

Linéariser $\cos^4(x)$ et $\sin^3(2x)$.

2.Calculer les intégrales suivantes

I = $\int_0^{\pi} \cos^4 x dx$ et J = $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 2x dx$.

13 On considère les fonctions f et F définies sur IR par $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$ et

$F(x) = (ax^2+bx+c)\,e^{-x}$ avec

a , b et c trois nombres réels.

1. Déterminer a , b et c pour que F soit une primitive de f sur IR.

2. Soit t un nombre réel tel que t > 0.

Calculer $\int_o^t (x+1)^2 e^{-x}dx$.

14 Calculer à l'aide d'une intégration par parties, les intégrales suivantes

$*\ a)\int_0^1 x\sqrt{x+1}dx$;

$b)\int_0^1 (t+1)\sqrt{3t+1}dt$;

$c)\int_4^0 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$;

$*\ d)\int_0^{\pi} x\cos 2x dx$

$f)\int_1^e \ln x dx$;

$*\ g)\int_1^e \ln(x+1)dx$;

$h)\int_1^e x^3 \ln x dx$;

$i)\int_O^1 (3x^2+2x)\ln(x+1)dx$;

$j)\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$;

$k)\int_1^0 (x+1)e^x dx$;

$l)\int_0^1 (x+1)e^{-2x} dx$;

$m)\int_{-1}^0 (3x+1)e^{(3x+1)} dx$.

15 Calculer à l'aide de deux intégrations par parties les intégrales suivantes :

$a)\int_4^0 \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} dx$;

$b)\int_0^1 x^2\sqrt{x+1}dx$;

$c)\int_0^{\pi} x^2\cos(2x)dx$;

$d)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)^2\sin x dx$

$*\ f)\int_1^e x(\ln x)^2 dx$;

$g)\int_0^1 (x+1)^2 e^x dx$

$h)\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x}\sin(3x)dx$.

16 L'objectif est de calculer les intégrales :

$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$, $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx$ et $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\, dx$.

1. Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par $f(x) = ln(x+\sqrt{x^2+2})$.

a) Calculer la dérivée f' de f .

b) En déduire la valeur de I .

2.a) Sans calculer explicitement J et K , vérifier que $J + 2I = K$.

b) A l'aide d'une intégration par parties portant sur K, prouver que $K = \sqrt{3} - J$.

c) En déduire les valeurs de J et K.

17 BAC D SESION 2001

On considère la fonction f dérivable sur *IR* et définie par : $f(x) = x(x+2)e^{x+2}$.

Soit (C) la représentation graphique de f dans le plan muni du repère orthonormé (O , I , J).

(unité 1 cm)

1. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Interpréter graphiquement ces résultats.

2. Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement ce résultat.

3. Démontrer que :

$\forall x \in$IR, $f'(x) = (x^2+4x+2)e^{x+2}$.

4. a) Etudier le sens de variation de f.

b) Dresser le tableau de variation de f.

En déduire le signe de $g(x)$suivant les valeurs de x.

5.a) Déterminer une équation de chacune des tangentes (T) et (T') à la courbe (C) au points d'abscisses respectives -2 et 0.

b)Tracer (T), (T') et (C).

6. λ est un nombre réel strictement inférieur à -2. A_λ désigne l'aire de la partie du plan délimitée par (OI), (C) et les droites d'équations $x = -2$ et $x = \lambda$.

a) A l'aide de deux intégrations par parties, démontrer que $A_\lambda = 4 - \lambda^2 e^{\lambda+2}$.

b) Déterminer $\lim_{\lambda\to-\infty} A_\lambda$.

7. a) Déterminer les nombres réels u et v tels que la fonction F définie sur IR par

$F(x) = (x^2 + ux + v)e^{x+2}$ o

soit une primitive de f sur IR.

b) Retrouver le résultat de la question 6.a).

18 Soit f la fonction définie sur $]-\infty ; 0]$ par

$\begin{cases} f(x) = x[1-\ln(-x)]\ si\ x < 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J) d'unité graphique 2 cm.

1. Etudier la continuité de f en 0.

2. Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

3. Calculer les limites quand x tend vers $-\infty$ de $f(x)$ et $\frac{f(x)}{x}$.
Interpréter graphiquement les résultats.
4. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
5. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.
6. Tracer (C).
7. Soit $t \in [-e\,;0[$.
a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire $A(t)$ en cm² de la partie du plan limitée par (C), l'axe (OI) et les droites d'équations respectives $x = -e$ et $x = t$.
b) Calculer $\lim\limits_{t\to 0} A(t)$.

19 BAC D REMPLACEMENT 1998

On considère la fonction f dérivable sur IR par :
$f(x) = x + 2 - x\,e^x$.
On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ;I;J). L'unité graphique est 1 cm.

Partie A

Soit g la fonction définie et dérivable sur IR et définie par : $g(x) = 1-(1+x)e^x$.

1.a) Calculer la limite de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

2.a) Calculer g(0).

b) Justifier que :

$\forall\, x \in]-\infty; 0[$, $g(x) > 0$

$\forall x \in]0; +\infty[$, $g(x) < 0$.

Partie B

1.a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
b) Etudier les variations de f en utilisant la question A.2) et dresser son tableau de variation.
2.a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote à (C) en $-\infty$.
b) Etudier la position de (D) par rapport à (C).
3.a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et donner une interprétation graphique du résultat.
b) Tracer (C).
4.a) Démontrer que (C) coupe (OI) en deux points A et B, A désignant le point d'abscisse négative α.
b) Démontrer que $\alpha \in]-2{,}3; -2{,}2[$.
c) Démontrer que : $e^{\alpha} = 1 + \frac{2}{\alpha}$.
5. Soit h la restriction de f à $]-\infty; 0]$.
a) Démontrer que h est une bijection de $]-\infty; 0]$ sur un intervalle K que l'on précisra.
b) Soit (Γ) la courbe représentative de h^{-1} dans le repère (O,I,J).
Tracer la demi-tangente à (Γ) au point d'abscisse 2.
c) Tracer (Γ).

Partie C

Soit t $\in]-\infty; \alpha]$.
1. Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'aire $\mathcal{A}(t)$ en cm² de la partie du plan limitée par (C), la droite (D) et les droites d'équations x = t et $x = \alpha$.
2. Calculer $\lim\limits_{t\to-\infty} \mathcal{A}(t)$.

20 BAC D SESSION 1997

Partie A

Soit g la fonction définie et dérivable sur IR et définie par : $g(x) = -x + e^{-\frac{x}{2}}$.
1.Calculer les limites respectives de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
3.a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans IR.
b) Justifier que : $0{,}7 \leq \alpha \leq 0{,}71$.
4. En déduire que :
$\forall x \in]-\infty; \alpha[$, $g(x) > 0$
$\forall x \in]\alpha; +\infty[$, $g(x) < 0$.

Partie B

On considère la fonction f dérivable sur IR par :
$f(x) = x - 2 + (4-2x)\,e^{\frac{x}{2}}$.
On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ;I;J). L'unité graphique est 2 cm.

1.a) Calculer les limites respectives de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et en donner une interprétation graphique .

c) Démontrer que la droite (D) d'équation y = x - 2 est asymptote à (C) en $-\infty$.

d) Etudier la position de (C) par rapport à (D).

2.a) Démontrer que : $\forall\, x \in IR, f'(x) = g(x)e^{\frac{x}{2}}$

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3.a) Démontrer que : $f(\alpha) = -4 + \alpha - \frac{4}{\alpha}$.

b) En déduire une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-1} près.

4.a) Déterminer une équation de tangente à (T) à (C) point d'abscisse 0.

b) Tracer (T), (D) et (C).

(On utilisera comme valeur approchée de $f(\alpha)$ le nombre 2,4).

5. Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

21 BAC D REMPLACEMENT 1997

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 - 2x^2\ln(2x)\ si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J) d'unité graphique 5 cm.

1.Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Interpréter graphiquement ces résultats.

2. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ et en donner une interprétation graphique.

3.Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

4. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

Partie B

Soit l'équation (E) : $x \in]0;+\infty[, f(x) = x$.

1. Démontrer que (E) est équivalente à l'équation (E'): $x \in]0;+\infty[, \ln(2x) - \frac{3x-1}{2x} = 0$.

2. Soit g la fonction définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, et définie par : $g(x) = \ln(2x) - \frac{3x-1}{2x}$.

a) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ >}} g(x)$.

b) Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

c) Etudier le signe de $g'(x)$ puis dresser le tableau de variation de g.

3. Démontrer que g s'annule une seule fois sur $\left]0;\frac{1}{2}\right]$ en α tel que : 0,2 < α <0,25.

On admet que g s'annule une seule fois sur $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ en β tel que: 1,65 < β < 1,7.

4. Déduire de tout ce qui précède le nombre de points d'intersection de (C) et de la droite (D) d'équation $y = x$.

5. Tracer (D) et (C).

Partie C

Soit t *un* nombre réel tel que : 0 < t < 1.

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire $A(t)$ de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = t$ et $x = 1$.

2. Calculer $\lim\limits_{\substack{t\to0 \\ >}} A(t)$.

7

SUITES NUMÉRIQUES

COURS 121

TRAVAUX PRATIQUES 131

EXERCICES 137

COMMENTAIRES

● **Ce thème** vise à :

► étudier le comportement global d'une suite numérique (majoration, convergence, variation) ;

► mettre en œuvre le raisonnement par récurrence ;

► donner des outils pour traiter des problèmes d'approximation.

● **En première**, la notion de limite de fonction a été introduire de façon intuitive. De même ici on pourra s'appuyer sur l'utilisation de la calculatrice et des graphiques pour introduire la notion de convergence d'une suite.

On peut faire comprendre à l'élève :

► que pour certaines suites, tous les termes à partir d'un certain rang, sont aussi proches que l'on veut d'un nombre réel a ;

► que pour d'autre suites, les termes à partir d'un certain rang, prennent des valeurs aussi grandes que l'on veut ;

► qu'il existe des suites qui ont des comportements irréguliers.

● **On apprendra** à l'élève à mettre en œuvre un raisonnement par récurrence. Ce type de raisonnement sera suggéré dans l'énoncé des exercices et des évaluations, lorsque son utilisation est indispensable.

● **L'étude** des suites est volontairement réduite. On s'attachera surtout à la résolution de problèmes concrets se ramenant principalement à l'étude des suites arithmétiques et géométriques.

► Les suites géométriques permettront d'établir la convergence des suites définies par récurrence. Toute

étude de ce type de suites devra comporter des indications sur la méthode à suivre.
► L'étude des suites sera étroitement liée à celle des fonctions. Le sens de variation ou les propriétés asymptotiques de certaines fonctions permettront de conclure sur le comportement des suites.
● **Le calcul** d'une valeur approchée d'une intégrale sera aussi un moyen de mettre en œuvre des suites.
► Le programme de première a pour objectif de permettre aux élèves de se familiariser avec le concept de suite numérique. Il n'en reste pas moins vrai que l'acquisition de ces notions reste à consolider, en particulier, les notions de suites arithmétiques et géométriques.
► On doit considérer qu'en classe de terminale, il est utile, voire indispensable, de retravailler les notions de base.
► On s'assurera que les élèves ont bien assimilé le fonctionnement d'une suite arithmétique ou géométrique ainsi que ses propriétés essentielles.
● **Dans l'étude** d'une suite récurrente, on pourra s'appuyer, quand le contexte le permettra, sur la représentation graphique pour conjecturer le comportement de la suite.
● **Les notions** de suite majorée ou minorée sont définies essentiellement dans le but de donner des outils complémentaires pour la convergence des suites. Ainsi, il ne sera pas nécessaire de multiplier les exercices et les méthodes autour de ces notions.
● **L'étude** du sens de variation d'une suite numérique pourrait se réduire au cas où la suite est monotone sur son ensemble de définition.
● **La comparaison** de deux suites numériques n'est nécessaire que dans la recherche de la limite d'une suite à l'aide des théorèmes de comparaison. Cela est hors programme.
De même on ne traitera pas les propriétés fondamentales sur les inégalités et la limite d'une suite .
Le théorème du point fixe et les théorèmes sur les limites par comparaison sont hors programme.
● **Les suites** arithmétiques et géométriques ont été étudiées en classe de première. Il sera cependant utile de mener à nouveau une étude relativement détaillée de ces suites. Et de les associer à des situations concrètes. Pour le sens de variation d'une suite géométrique , il est préférable d'apprendre aux élèves à retrouver les résultats qui ne sont pas simples à mémoriser.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES
1.Suites monotones 2.Suites convergentes 3.Notion de convergence 4.Unicité de la limite (admise) 5.Si f est une fonction numérique telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ *alors la limite de la suite u définie par* $u_n = f(n)$ *est* l . 6.Suites majorées, minorées - *Toute suite croissante et majorée converge (admis).* - *Toute suite décroissante et minorée converge (admis).* 7.Convergence des suites géométriques et arithmétiques 8.Suites divergentes.	☞ Démontrer qu'une suite est monotone par : - une comparaison de deux termes généraux consécutifs quelconques ; - l'étude des variations d'une fonction ; - un raisonnement par récurrence. ☞ Démontrer qu'une suite est convergente ou divergente en utilisant : - les opérations sur les limites ; - une suite géométrique ou arithmétique ; - les théorèmes sur la convergence . ☞ Résoudre des problèmes concrets (biologie, économie), utilisant principalement les suites arithmétiques ou géométriques.

COURS

I. RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

Le raisonnement par récurrence permet de justifier qu'une proposition P(n) dépendant d'un entier naturel n est vraie pour tout entier $n \geq n_0$ où n_0 est un entier naturel donné. Elle se résume en deux étapes :

■**Initialisation** : Vérifier que $P(n_0)$ est vraie.

■ H**érédité** : Etablir que pour un entier k donné, $k \geq n_0$, si P(k) est vraie alors P(k+1) est vraie.

Une fois que les deux étapes précédentes sont établies, on conclut que P(n) est vraie pour tout $n \geq n_0$

Exemple

On considère la suite u définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \geq 0, u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 3 - 2^n$.

Solution

Notons P(n) la proposition « $u_n = 3 - 2^n$ *» .*

- Vérifions que P(0) est vraie : $u_0 = 2$ *et* $3 - 2^0 = 3 - 1 = 2$ *donc* $u_0 = 3 - 2^0$.

Donc P(0) est vraie.

- Soit k un entier naturel, supposons que P(k) est vraie c'est- à- dire $u_k = 3 - 2^k$ *et démontrons que P(k+1) est vraie c'est-à-dire* $u_{k+1} = 3 - 2^{k+1}$.

Par définition de la suite u on a : $u_{k+1} = 2u_k - 3$.

Par hypothèse de récurrence, $u_k = 3 - 2^k$.

Ainsi , $u_{k+1} = 2\,[3 - 2^k] - 3 = 6 - 2^{k+1} - 3 = 3 - 2^{k+1}$ *donc P(k + 1) est vraie.*

Conclusion : pour tout $n \in IN, u_n = 3 - 2^n$.

Exercices

Soit la suite *u* définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \geq 0, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1} \end{cases}$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.

II. SENS DE VARIATIONS D'UNE SUITE NUMÉRIQUE

Définition

Soit (u_n) une suite numérique dont l'ensemble de définition est E.
- (u_n) est **croissante** si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n de E.
- (u_n) est **décroissante** si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n de E.
- (u_n) est **constante** si $u_{n+1} = u_n$ pour tout n de E.

Remarques :
- Une suite (u_n) numérique est dite monotone si elle est soit croissante, soit décroissante.
- Une suite constante est une suite monotone.

Exemple 1

Démontrer que la suite *u* définie pour tout entier naturel n par :$u_n = \ln(n+1)$ est croissante

Solution
Pour tout entier naturel n, $u_n = \ln(n+1)$ *et* $u_{n+1} = \ln[(n+1)+1] = \ln(n+2)$
$u_{n+1} - u_n = \ln(n+2) - \ln(n+1)$.
Pour tout entier naturel n, $n+2 > n+1$ *donc* $\ln(n+2) > \ln(n+1)$.
Ainsi pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n > 0$ *. Il en résulte que la suite u est croissante.*

Point méthode
Pour étudier le sens de variation d'une suite numérique (u_n) *, on pourra*
- *étudier le signe de* $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n}$.
- *si la suite est à termes strictement positifs, comparer le quotient* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ***et 1***.
- *étudier* ***le sens de variation*** *de la fonction f si* (u_n) *est définie par* $u_n = f(n)$.
- *faire* ***un raisonnement par récurrence***.

Exemple 2

Soit la suite (u_n)définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \frac{1}{2^{3n+1}}$.
Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

Solution
Pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
On a $\forall n \in IN$, $u_{n+1} = \frac{1}{2^{3(n+1)+1}} = \frac{1}{2^{3n+4}}$. *On a* $\forall n \in IN$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2^{3n+4}} \times \frac{2^{3n+1}}{1} = \frac{1}{8}$.
Ainsi, pour tout n $\in IN$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ *et comme* $u_n > 0$ *alors* $u_{n+1} < u_n$. *Par conséquent, la suite* (u_n) *est décroissante.*

Exemple 3

Soit la suite v définie pour tout entier naturel n non nul par : $v_n = \sqrt{\frac{2}{n}+1}$.

Justifier que la suite *v* est décroissante.

Solution

Considérons la fonction f définie sur [1 ; + ∞[par $f(x) = \sqrt{\frac{2}{x}+1}$.

Pour tout entier naturel n, on a : $v_n = f(n)$.

$\forall x \in [1;+\infty[,\ f'(x) = \frac{-1}{x^2\sqrt{\frac{2}{x}+1}}$. $\forall x \in [1;+\infty[,\ f'(x) < 0$ *donc f est strictement décroissante sur [1 ; + ∞[. Il en résulte que, la suite v est décroissante.*

Exemple 4

Soit la suite v définie par $\begin{cases} v_0 = 5 \\ \forall n \geq 0, v_{n+1} = \sqrt{v_n + 12} \end{cases}$

1. Démontrer par récurrence que : $\forall\ n \in IN,\ v_n > 0$.
2. Démontrer par récurrence que la suite *v* est décroissante.

Solution

1. *Notons P(n) la proposition «* $v_n > 0$ *» .*
- Vérifions que P(0) est vraie :
$v_0 = 5$ *donc* $v_0 > 0$*.Ainsi, P(0) est vraie .*
- Soit k un entier naturel, supposons que P(k) est vraie c'est-à-dire $v_k > 0$ *et démontrons que P(k+1) est vraie c'est-à-dire* $v_{k+1} > 0$.
Par définition de la suite v on a : $v_{k+1} = \sqrt{v_k + 12}$.
D'après l'hypothèse de récurrence, $v_k > 0$. *Par suite,*$v_k + 12 > 0$, *donc* $\sqrt{v_k + 12} > 0$
D'où $v_{k+1} > 0$. *Ainsi, P(k+1) est vraie.*
Conclusion : pour tout $n \in IN, v_n > 0$.
2. *Notons P(n) la proposition «* $v_{n+1} \leq v_n$ *» .*
- Vérifions que P(0) est vraie :
$v_0 = 5$ *et* $v_1 = \sqrt{17}$ *donc* $v_1 < v_0$. *Ainsi, P(0) est vraie .*
- Soit k un entier naturel, supposons que P(k) est vraie c'est-à-dire « $v_{k+1} \leq v_k$ *» et démontrons que P(k+1) est vraie c'est-à-dire* $v_{k+2} \leq v_{k+1}$.
On a : $v_{k+1} = \sqrt{v_k + 12}$ *et* $v_{k+2} = \sqrt{v_{k+1} + 12}$.
D'après l'hypothèse de récurrence, $v_{k+1} \leq v_k$.
Par suite : $v_{k+1} + 12 \leq v_k + 12$, *donc* $\sqrt{v_{k+1} + 12} \leq \sqrt{v_k + 12}$, *soit* $v_{k+2} \leq v_{k+1}$.
D'où P(k+1) est vraie.
Conclusion : pour tout $n \in IN, v_{n+1} \leq v_n$. *Ainsi, la suite v est décroissante.*

Exercice

On considère la suite V définie par $\begin{cases} V_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \geq 0, V_{n+1} = V_n - V_n{}^2 \end{cases}$.

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = x - x^2$.

1.a) Démontrer que f est strictement croissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

b) Justifier que $f\left(\left[0;\frac{1}{2}\right]\right) \subset \left[0;\frac{1}{2}\right]$.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $V_n \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$.

3. Démontrer que la suite V est décroissante.

III. SUITES MAJORÉES, SUITES MINORÉES

Définition

Soit (u_n) une suite numérique dont l'ensemble de définition est E.

- (u_n) est **majorée** s'il existe un nombre réel M tel que $u_n \leq M$ pour tout n de E.
- (u_n) est **minorée** s'il existe un nombre réel m tel que $u_n \geq m$ pour tout n de E.
- (u_n) est **bornée** si (u_n) est majorée et minorée.

Exemple 1

Soit la suite v définie sur IN^* par $v_n = \frac{3n^2+n}{n^2+1}$.

Démontrer que v est minorée par 2.

Solution

Pour tout $n \in IN^*$, $v_n - 2 = \frac{3n^2+n}{n^2+1} - 2 = \frac{n^2+n-2}{n+1} = \frac{(n+2)(n-1)}{n+1}$.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\frac{(n+2)(n-1)}{n+1} \geq 0$, *donc* $v_n - 2 \geq 0$. *C'est-à-dire* $v_n \geq 2$.

Donc la suite v est minorée par 2.

Exemple 2

Soit la suite u définie sur IN par : $u_n = \sqrt{5 - \frac{1}{n^2+1}}$

Démontrer que pour tout $n \in IN$, $2 \leq u_n \leq \sqrt{5}$.

Solution

Pour tout entier naturel n , on a : $n^2 + 1 \geq 1$.

$n^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{n^2+1} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\frac{1}{n^2+1} \leq 0 \Leftrightarrow 4 \leq 5 - \frac{1}{n^2+1} \leq 5$

$\Leftrightarrow 2 \leq \sqrt{5 - \frac{1}{n^2+1}} \leq \sqrt{5}.$

Ainsi, pour tout entier naturel n , $2 \leq U_n \leq \sqrt{5}$.

Exemple 3

Soit suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par : $u_n = \frac{2n-3}{5n-1}$.

Démontrer que : $\forall n \in$IN* , $-\frac{1}{4} \leq u_n < \frac{2}{5}$.

Solution

Considérons la fonction f *définie sur* $[1; +\infty[$ *par :* $f(x) = \frac{2x-3}{5x-1}$.

$\forall n \in$IN* $u_n = f(n)$.

f *est dérivable sur [1 ; +∞[et* $f'(x) = \frac{13}{(5x-1)^2}$.

Pour tout $x \in [1; +\infty[$, $f'(x) > 0$ *donc* f *est strictement croissante sur* $[1; +\infty[$.

f *est continue et strictement croissante sur* $[1; +\infty[$, *donc* $f([1; +\infty[) = \left[f(1); \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[= \left[-\frac{1}{4}; \frac{2}{5}\right[$.

On a donc pour tout $x \in [1; +\infty[$, $-\frac{1}{4} \leq f(x) < \frac{2}{5}$.

Par suite, pour tout $n \in IN^*$, $-\frac{1}{4} \leq u_n < \frac{2}{5}$.

Exercice

Soit (a_n) la suite définie par : $a_0 = -1$ et $\forall$ n ∈IN, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$.

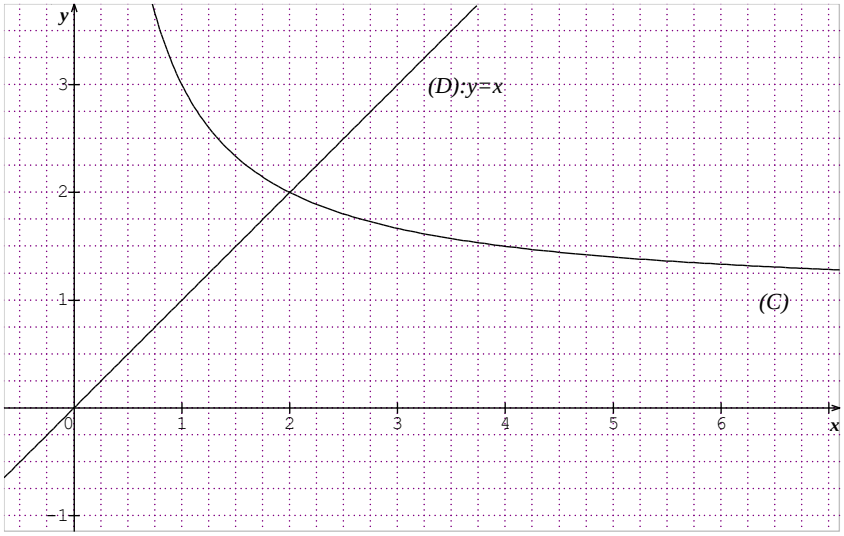
Démontrer par récurrence que : $\forall$ n ∈IN, -1 ≤ $a_n \leq 3$.

IV. LIMITE D'UNE SUITE NUMÉRIQUE

1. Notion de limite d'une suite

Activité : Soit la suite **v** définie par $\begin{cases} v_0 = 1 \\ \forall n \geq 0, v_{n+1} = 1 + \frac{2}{v_n} \end{cases}$

La représentation graphique de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ $par\ f(x) = 1 + \frac{2}{x}$ et la droite (D) : $y = x$ sont données :



1. Construire sur l'axe des abscisses les 5 premiers termes de la suite (v_n).
2. Vers quelle valeur les termes de la suite se rapprochent – ils pour les indices n de plus en plus grands ?

Notion de limite

■ Pour certaines suites numériques (u_n) tous les termes à partir d'un certain rang sont aussi proches que l'on veut d'un nombre réel ℓ. Dans ce cas on dit que la suite (u_n) a pour limite ℓ et on écrit :
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou simplement $\lim(u_n) = \ell$.

■ Pour certaines suites numériques (u_n) tous les termes à partir d'un certain rang sont aussi grand que l'on veut. Dans ce cas on dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ et on écrit :
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou simplement $\lim(u_n) = +\infty$.

■ On dit que la suite (u_n) a pour limite $-\infty$ lorsque la suite $(-u_n)$a pour limite $+\infty$ et on écrit
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ou simplement $\lim(u_n) = -\infty$.

2. Définition

■ Une suite numérique (u_n) est **convergente** si elle admet une limite finie.
■ Une suite non convergente est dite **divergente**.

3. Propriétés

Propriété 1

Si une suite numérique admet une limite alors cette limite est unique.

Propriété 2

Soit (u_n) la suite numérique de terme général $u_n = f(n)$, où f est une fonction définie sur un intervalle de la forme [a ; +∞[.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ (réel ou infini) alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Exemples

Etudier la convergence de chacune des suites (u_n), (v_n), (t_n).

a) $\forall$ n $\in$ IN*, $u_n = 3n^2 - \frac{1}{n}$;

b) $\forall$ n $\in$ IN-{1}, $v_n = \frac{3n^2-n}{1-n^2}$;

c) $\forall$ n $\in$ IN, $t_n = 3(-1)^n$.

Solution

a) Soit f la fonction définie sur]0 ; +∞[par : f(x) = $3x^2 - \frac{1}{x}$. $\forall n \in IN^*$, $u_n = f(n)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (3x^2 - \frac{1}{x}) = +\infty$ *car* $\lim\limits_{x\to+\infty} (3x^2) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} (-\frac{1}{x}) = 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Donc la suite (u_n) *est divergente.*

b) Soit g la fonction définie sur]1 ;+∞[par : $g(x) = \frac{3x^2-x}{1-x^2}$.

$\forall n \in n>1$, $v_n = g(n)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - x}{1 - x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{-x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} (-3) = -3$,

donc $lim(v_n)$ *= -3 . La suite* (v_n) *converge vers -3.*

c) Si n est pair alors t_n *= 3 et si n est impair alors* t_n *= -3. Donc la suite* (t_n) *est divergente.*

Exercice

Etudier la convergence des suites (a_n), (b_n), (c_n), (d_n), (u_n).

$a_n = n^2 - 4\sqrt{n} + 1$; $b_n = 4 + (-1)^n$; $c_n = \frac{ne^{-n}}{n+1}$; $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$; $u_n = \frac{7n^2-4n}{2n^2+3n+5}$.

Remarque : Une suite numérique étant une fonction, les opérations sur les limites de fonctions restent également valables sur les suites numériques.

4. Convergence d'une suite monotone

Propriétés

- Une suite croissante et majorée est convergente.
- Une suite décroissante et minorée est convergente.

Exemple

On considère la fonction numérique f définie et dérivable sur]0 ;+∞[par :

$f(x) = -lnx + x$.

1. Démontrer que : $\forall x \in [1 ; 2], f(x) \in [1 ; 2]$.

2. On considère la suite numérique (w_n) définie par : $w_0 =$ 2 et $\forall n \in IN$, $w_{n+1} = -\ln(w_n) + w_n$.

a) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in$ IN, $1 \leq w_n \leq 2$.

b) Démontrer que la suite (w_n) est décroissante.
c) En déduire suite (w_n) est convergente.

Solution

1. f est dérivable sur]0 ;+∞[. On a : $\forall x \in]0\,;+\infty[,\ f'(x) = -\frac{1}{x} + 1 = \frac{x-1}{x}$.

Donc $\forall x \in]1\,;2],\ f'(x) > 0$ *. Donc f est continue et strictement croissante sur [1 ;2].*

On a donc $f([1\,;2]) = [f(1)\,;\ f(2)]$.

$f(1) = 1$ *donc* $f(1) \in [1\,;2]$ *;* $f(2) \approx 1{,}306$ *donc* $f(2) \in [1\,;2]$.

D'où : $\forall x \in [1\,;2], f(x) \in [1\,;2]$.

2.a) Soit P_n *:* $1 \leq w_n \leq 2$.

Pour n = 0, $w_0 = 2$ *et* $1 \leq 2 \leq 2$ *donc* P_0 *est vraie.*

Supposons que pour un entier $k \geq 0$, P_k *soit vraie c-à-d que :* $1 \leq w_k \leq 2$ *et démontrons que* P_{k+1} *est vraie c'est-à-dire :* $1 \leq w_{k+1} \leq 2$.

On a : $w_k \in [1\,;2]$, *donc* $f(w_k) \in [1\,;2]$ *d'après la question précédente. Comme* $w_{k+1} = f(w_k)$, *donc* $w_{k+1} \in [1\,;2]$. *Donc* P_{k+1} *est vraie.*

Conclusion : $\forall n \in IN,\ 1 \leq w_n \leq 2$.

b) $\forall n \in IN,\ w_{n+1} - w_n = -ln(w_n)$.

Comme $1 \leq w_n \leq 2$ *donc* $ln(w_n) \geq 0$, *par suite* $-ln(w_n) \leq 0$.

On en déduit que : $\forall n \in IN,\ w_{n+1} - w_n \leq 0$. *Donc la suite* (w_n) *est décroissante.*

c) La suite (w_n) *est décroissante et minorée par 1, donc elle est convergente.*

Exercice

On considère la suite numérique (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ \forall n \in IN, U_{n+1} = \dfrac{4U_n - 3}{U_n} \end{cases}$$

On considère la fonction numérique f définie et dérivable sur]0 ;+∞[par : $f(x) = \frac{4x-3}{x}$.

1. a) Démontrer que f est strictement croissante sur $[2\,;3]$.

b) Démontrer que : $f([2\,;3]) \subset [2\,;3]$.

2. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in IN,\ 2 \leq U_n \leq 3$.

3. Démontrer que la suite (U_n) est croissante.

4. En déduire suite (U_n) est converge.

V. SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMETRIQUES

1. Rappels

	Suite arithmétique de raison r	**Suite géométrique de raison q**
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = qu_n$
Relation entre u_n et u_p	$u_n = u_p + (n-p)r$	$u_n = u_p \times q^{n-p}$
Somme de termes consécutifs **$S = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_N$** **$(p \leq N)$** **N- p + 1 termes**	$S = \frac{(N-p+1)(u_p+u_N)}{2}$	$S = \frac{u_p(1-q^{N-P+1})}{1-q}, si\ q \neq 1$ $S = (N-p+1)u_p, si\ q = 1$

Exercices

1 Soit la suite (u_n) définie sur IN par : $u_{n+1} = \frac{3}{e^{2n}}$.

a) Démontrer que u est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) On pose pour tout entier naturel , $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

Démontrer que pour tout entier naturel , $S_n = \frac{3e^2}{e^2-1}\left[1 - \frac{1}{e^{2n+2}}\right]$.

2 Soit la suite (t_n) définie sur IN par : $t_{n+1} = 4 - 7n$.

a) Démontrer que t est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) On pose pour tout entier naturel , $S_n = t_0 + t_1 + \ldots + t_n$.

Calculer S_n en fonction en fonction de n.

3 Dans tout ce qui suit, (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de 1er terme u_0 .

a) $u_0 = -1$ et $r = 2$. Calculer u_5, u_{10} et la somme des 11 premiers termes. Exprimer u_n en fonction de n.

b) $u_2 = -17$ et $r = -3$. Calculer u_0, u_{12} et la somme $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

c) $u_3 = 2$ et $u_{12} = 20$. Calculer u_n en fonction de n et la somme $S_n = u_1 + u_1 + \ldots + u_n$.

4 Dans tout ce qui suit, (u_n) est une suite géométrique de raison q et de 1er terme u_0 .

a) $u_0 = 4$ et $q = 2$. Calculer u_5, u_{10} et la somme des 11 premiers termes. Exprimer u_n en fonction de n.

b) $u_2 = 1$ et $u_5 = \frac{1}{64}$. Calculer q et u_0 et la somme $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

c) $u_3 = -108$ et $u_1 = -12$. Calculer q sachant que q < 0, caluler u_1.

Calculer u_n en fonction de n et la somme $S_n = u_1 + u_1 + \ldots + u_n$.

Exercices

1 $\forall$ n ∈ IN*, on pose $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$.

Déterminer une expression de S_n en fonction de n.

2 $\forall$ n ∈ IN, on pose $T_n = 1 + 2 + \cdots + n$.

Déterminer une expression de T_n en fonction de n.

2. Convergence des suites géométriques

Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

■ Si q = 1, alors la suite (u_n) converge vers son premier terme.

■ Si q ∈]-1 ;1[, alors la suite (u_n) converge vers 0.

■ Dans tous les autres cas, la suite (u_n) est divergente.

Remarque

Soit (u_n) la suite définie sur IN par : $u_n = q^n$ où q est nombre réel non nul.

Si q ∈]-1 ;1[, alors la suite (u_n) converge vers 0.

Si q > 1, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Si q ≤ -1, la suite (u_n) n'admet pas de limite.

Exemple

Dans chacun des cas ci-dessous, étudier la convergence de la suite (u_n) la suite définie sur IN par :

a) $u_n = 5\left(\frac{2}{3}\right)^n$; b) $u_n = \left(\frac{e}{2}\right)^n$; c) $u_n = (-2)^n$.

a) *Comme* $\frac{2}{3} \in]-1;1[$, *on peut conclure que la suite u converge vers 0.*

b) *Comme* $\frac{e}{2} > 1$, *on peut conclure que la suite u est divergente.* $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

c) *Comme* $-2 \leq -1$, *on peut conclure que la suite u est divergente. La suite u n'admet pas de limite.*

TRAVAUX PRATIQUES

Exercice résolu 1

Soit (v_n) la suite définie sur IN par : $\begin{cases} v_0 = 0 \\ \forall n \in IN, v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n + 12 \end{cases}$

1. Démontrer par récurrence que: $\forall n \in$ IN, $v_n = 8 - 8\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

2. Etudier la convergence de la suite (v_n).

Solution

1.*Soit P_n la proposition : « $v_n = 8 - 8(-\frac{1}{2})^n$ ».*

Pour $n = 0$, $v_0 = 0$ et $8 - 8(-\frac{1}{2})^0 = 8 - 8 = 0$ donc $v_0 = 8 - 8(-\frac{1}{2})^0$. Ainsi, P_0 est vraie.

Supposons que pour un entier $k \geq 0$, P_k soit vraie c'est-à-dire : $v_k = 8 - 8(-\frac{1}{2})^k$ et démontrons que P_{k+1} est vraie c'est-à-dire: $v_{k+1} = 8 - 8(-\frac{1}{2})^{k+1}$.

On a : $v_{k+1} = -\frac{1}{2}v_k + 12$ or $v_k = 8 - 8(-\frac{1}{2})^k$, donc :

$v_{k+1} = -\frac{1}{2}v_k + 12 = -\frac{1}{2}(8 - 8(-\frac{1}{2})^k) + 12 = -4 - 8(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})^k + 12 = 8 - 8(-\frac{1}{2})^{k+1}$. *Donc P_{k+1} est vraie.*

On conclut : $\forall n \in IN, v_n = 8 - 8(-\frac{1}{2})^n$.

$2. On\ a\ -\frac{1}{2} \in]-1;1[\ donc \lim\limits_{n\to+\infty}(-\frac{1}{2})^n = 0, parconséquent,$

$lim(v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}[8 - 8\left(-\frac{1}{2}\right)^n] = 8$.

Exercice résolu 2

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{9}{6-u_n} \end{cases}, \forall n \in IN$

Dans le plan rapporté au repère orthonormé (O,I,J), la courbe (C) ci-dessous représente la fonction f définie sur $]-\infty;6[$ par :

$f(x) = \frac{9}{6-x}$.

1.a) A l'aide de (C) et de la droite (D) d'équation *y = x*, placer les termes u_0, u_1, u_2 et u_3 de la suite (u_n) sur l'axe (OI).

b) Quelle conjecture peut-on faire quant à la convergence de la suite (u_n) ?

2. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in$ IN, $u_n < 3$.

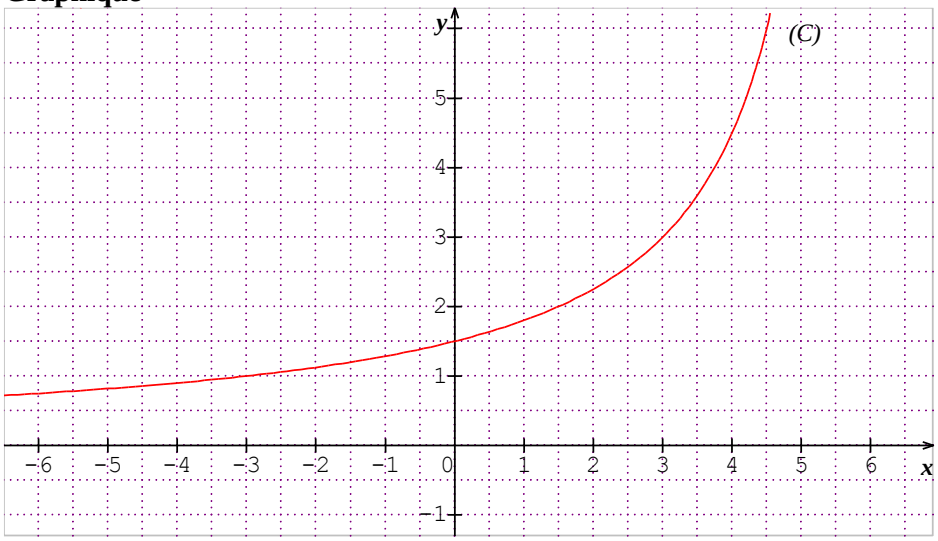
3. On considère la suite (v_n) définie sur IN par : $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$.

a)Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n.

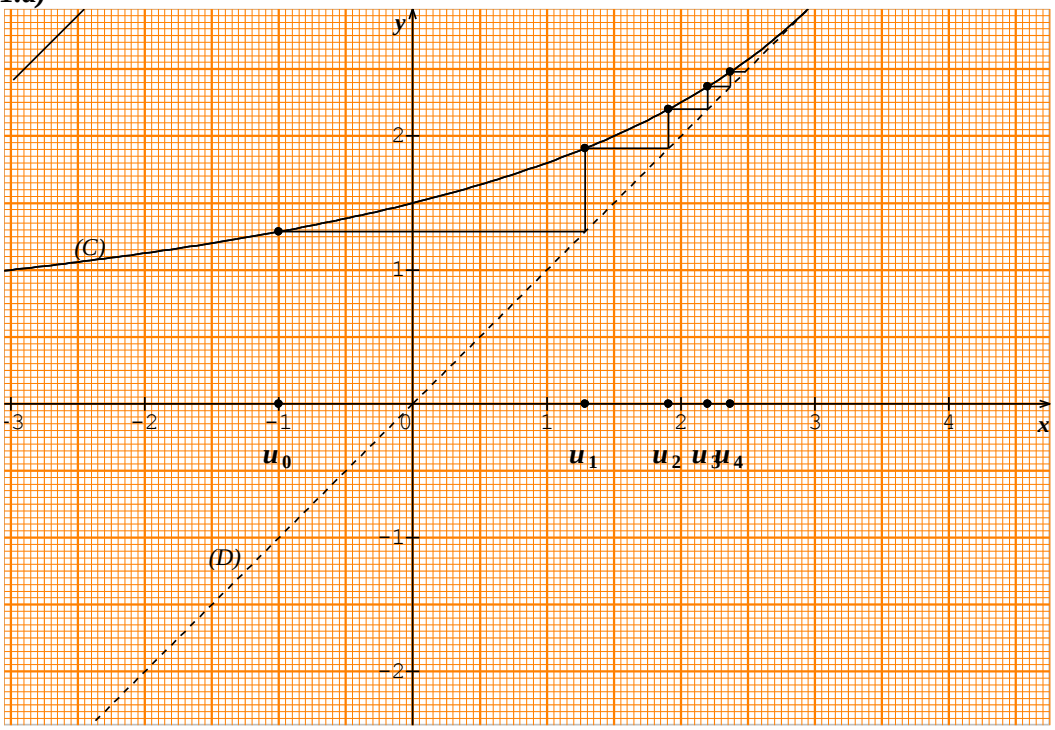
c) Calculer la limite de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n).

Graphique



Solution

1.a)



b) Conjecture : La suite (u_n) semble converger vers 3.

2. Soit P_n : $u_n < 3$.

Pour n = 0, $u_0 = -1$ et -1 < 3 donc P_0 est vraie.

Supposons que pour un entier $k \geq 0$, P_k est vraie c'est-à-dire $u_k < 3$ et démontrons que P_{k+1} est vraie c'est-à-dire $u_{k+1} < 3$.

Pour cela, étudions le signe de $u_{k+1} - 3$:

On a : $u_{k+1} - 3 = \frac{9}{6 - u_k} - 3 = \frac{-9 + 3u_k}{6 - u_k}$.

On a : $u_k < 3$, donc : $-u_k > -3$ donc : $6 - u_k > 3 > 0$. (1)
On a : $u_k < 3$, donc : $3u_k < 9$, donc : $-9+3u_k < 0$. (2)
Donc d'après (1) et (2), on déduit que : $\frac{-9+3u_k}{6-u_k} < 0$, donc $u_{k+1} - 3 < 0$ .Donc P_{k+1} est vraie.

Conclusion : $\forall n \in IN,\ u_n < 3$.

3.a) $\forall n \in IN, v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}-3} - \frac{1}{u_n-3} = \frac{1}{\frac{-9+3u_n}{6-u_n}} - \frac{1}{u_n-3} = \frac{6-u_n}{-9+3u_n} - \frac{1}{u_n-3} = \frac{3-u_n}{-9+3u_n}$

$v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{3}$.

Donc la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{u_0-3} = -\frac{1}{4}$

b) Comme (v_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$ et de premier terme v_0 .

Donc $\forall n \in IN, v_n = v_0 + nr = -\frac{1}{4} - \frac{1}{3}n$.

On a : $v_n = \frac{1}{u_n-3}$, donc $u_n - 3 = \frac{1}{v_n}$, soit : $u_n = 3 + \frac{1}{v_n}$.

Donc $\forall n \in IN, u_n = 3 + \frac{1}{-\frac{1}{4} - \frac{1}{3}n}$.

c) $lim(v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left[-\frac{1}{4} - \frac{1}{3}n\right] = -\infty$, donc $lim\left(\frac{1}{v_n}\right) = 0$.

Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} [u_n] = \lim\limits_{n\to+\infty} \left[3 + \frac{1}{v_n}\right] = 3$.

Exercice résolu 3

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies par :

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{3} \\ \forall n \in IN, U_{n+1} = \frac{3}{2}(U_n)^2 \end{cases}$$ et

$V_n = \ln\left(\frac{3}{2}U_n\right)$ (ln désigne la fonction logarithme népérien).

1. Calculer V_o .
2. Démontrer que (V_n) est une suite géométrique de raison 2 .
3. Exprimer V_n en fonction de n.
4. Calculer la limite de (V_n).
5. Exprimer U_n en fonction de V_n et en déduire la limite de la suite (U_n) .
6. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_{n-1}$ et $T_n = U_0 U_1 \ldots U_{n-1}$.

a) Démontrer que : $\forall n \in IN^*, S_n = (1 - 2^n)\ln 2$.

b) Justifier que : $\forall n \in IN^*, T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$.

c) En déduire que : $\forall n \in IN^*, T_n = \frac{2^{n+1}}{3^n \times 2^{2^n}}$.

1. $V_o = \ln\left(\frac{3}{2}U_0\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$.

2. $\forall n \in IN, V_{n+1} = \ln\left(\frac{3}{2}U_{n+1}\right)$. Comme $U_{n+1} = \frac{3}{2}(U_n)^2$, il vient :

$V_{n+1} = \ln\left(\frac{3}{2}\frac{3}{2}(U_n)^2\right) = \ln\left(\frac{9}{4}(U_n)^2\right) = \ln\left(\frac{3}{2}U_n\right)^2 = 2\ln\left(\frac{3}{2}U_n\right) = 2V_n$.

3. Comme (V_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $V_o = -\ln 2$, on peut écrire :

$\forall\, n \in IN,\quad V_n = -2^n \ln 2.$

4. Comme 2 > 1, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ *. De plus,* $-\ln 2 < 0$*, il vient :* $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty$.

5. Pour tout entier naturel n, $V_n = \ln\left(\frac{3}{2}U_n\right)$.

$V_n = \ln\left(\frac{3}{2}U_n\right) \Longrightarrow e^{V_n} = \frac{3}{2}U_n$

$\Longrightarrow U_n = \frac{2}{3}e^{V_n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty \; et \; \lim\limits_{X\to-\infty} e^x = 0 \;\; donc \; \lim\limits_{n\to+\infty} e^{V_n} = 0.$

Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0.$

6.a) S_n est la somme des termes d'une suite géométrique de raison 2, donc :

$\forall\, n \in IN^*, S_n = \frac{V_0[1-2^n]}{1-2} = (1-2^n)\ln 2$.

b) $\forall\, n \in IN^*, T_n = U_0U_1 \ldots U_{n-1} = \frac{2}{3}e^{V_0}\frac{2}{3}e^{V_1} \ldots \frac{2}{3}e^{V_{n-1}} = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{V_0+V_1+\cdots+V_{n-1}} = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$

Comme $S_n = (1-2^n)\ln 2$*, il vient :* $\forall\, n \in IN^*, T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{(1-2^n)\ln 2} = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{\ln 2} e^{(-2^n)\ln 2}$.

$\forall\, n \in IN^*, T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{\ln 2} e^{(-2^n)\ln 2} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times 2e^{\ln\frac{1}{2^{2^n}}} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times 2 \times \frac{1}{2^{2^n}} = \frac{2^{n+1}}{3^n \times 2^{2^n}}$.

Exercice résolu 4

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall\, n \in \text{IN}, u_{n+1} = \frac{4u_n-3}{u_n} \end{cases}$

1. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{4x-3}{x}$.

Sa courbe représentative (C) est tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J).

a) Tracer la droite (D) d'équation y = x.

b) Utiliser (C) et (D) pour construire $u_0, u_1, u_2 \; et \; u_3$ sur l'axe (OI).

c) Conjecturer la limite de la suite (u_n).

2.a) Démontrer que : $f([2;3]) \subset [2;3]$.

b) Démontrer par récurrence que : $\forall\, n \in$IN, $2 \leq u_n \leq 3$.

c) Démontrer que la suite u est croissante.

d) En déduire que la suite u converge.

3. On considère la suite (v_n) définie sur IN par : $v_n = \frac{-3+u_n}{-1+u_n}$

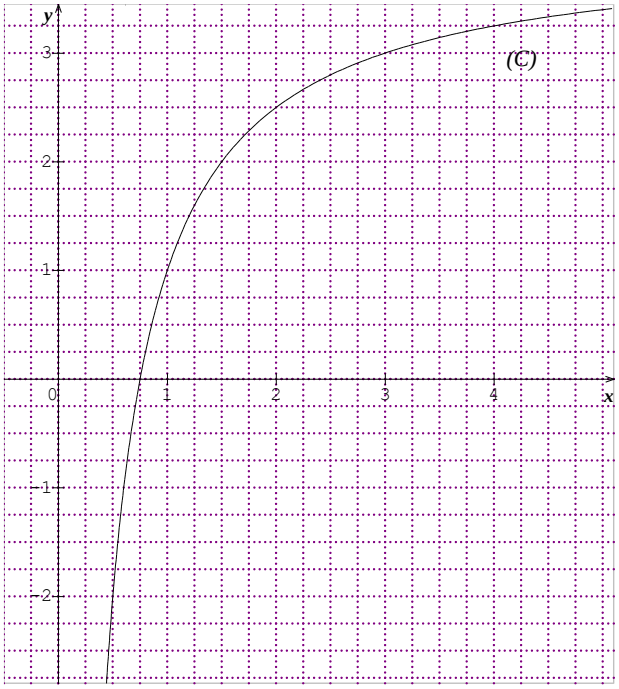
a)Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

b) Calculer la limite de la suite (v_n).

c) En déduire la limite de la suite (u_n).

d) Démontrer que : $\forall\, n \in$IN, $v_n = -\frac{1}{3^n}$.

e) Exprimer u_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.



Solution

a) Voir graphique ci-dessous.

b) Voir graphique ci-dessous.

c) La suite (u_n) semble converger vers 3.

2.a) f est dérivable sur $]0;+\infty[$. Pour tout x de $]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{3}{x^2}$.

Pour tout x de $]0;+\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Comme f est continue et strictement croissante sur $[2;3]$, $f([2;3]) = [f(2);f(3)] = \left[\frac{5}{3};3\right]$.

De plus $\frac{5}{3}$ et 3 appartiennent à $[2;3]$, donc $f([2;3]) \subset [2;3]$.

b) Démontrons par récurrence que : $\forall\, n \in IN,\ 2 \leq u_n \leq 3$.

Notons P(n) la proposition « $2 \leq u_n \leq 3$ » .

<u>Initialisation</u> : $u_0 = 2$; , $2 \leq 2 \leq 3$ donc P(0) est vraie.

<u>Hérédité</u> : Soit $k \in IN$, supposons P(k) vraie.

P(k) vraie $\Longrightarrow 2 \leq u_k \leq 3$

$\Longrightarrow u_k \in [2;3]$

$\Longrightarrow f(u_k) \in f([2;3])$

Comme $f([2;3]) \subset [2;3]$ donc $f(u_k) \in [2;3]$, soit $u_{k+1} \in [2;3]$.

On a donc : P(k) vraie $\Longrightarrow$ P(k+1) vraie.

On peut donc conclure : $\forall\, n \in IN,\ 2 \leq u_n \leq 3$.

c) $\forall\, n \in IN,\ u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n - 3}{u_n} - u_n = \frac{-(u_n-1)(u_n-3)}{u_n}$.

On sait que : $\forall\, n \in IN,\ 2 \leq u_n \leq 3$ donc $1 \leq u_n - 1 \leq 2$ et $-1 \leq u_n - 3 \leq 0$.

Il vient : $\forall\, n \in IN,\ \frac{-(u_n-1)(u_n-3)}{u_n} \geq 0$.

Ainsi : $\forall\, n \in IN,\ u_{n+1} - u_n \geq 0$. Donc la suite u est croissante.

d) D'après ce qui précède, la suite u est croissante et majorée par 3 donc la suite u est convergente.

3.a) $\forall\, n \in IN,\ v_{n+1} = \frac{-3 + u_{n+1}}{-1 + u_{n+1}}$ *et* $u_{n+1} = \frac{4u_n - 3}{u_n}$.

Donc $\forall\, n \in IN,\ v_{n+1} = \frac{-3 + \frac{4u_n - 3}{u_n}}{-1 + \frac{4u_n - 3}{u_n}} = \frac{u_n - 3}{3u_n - 3} = \frac{1}{3}\left(\frac{u_n - 3}{u_n - 1}\right) = \frac{1}{3}v_n$.

Donc la suite (v_n) *est une suite géométrique de raison* $\frac{1}{3}$.

b) La suite (v_n) *est une suite géométrique de raison* $\frac{1}{3}$ *.Comme* $\frac{1}{3} \in]-1;1[$ *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

c) $v_n = \frac{-3 + u_n}{-1 + u_n} \Leftrightarrow -v_n + v_n u_n = -3 + u_n$

$\Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = -3 + v_n$

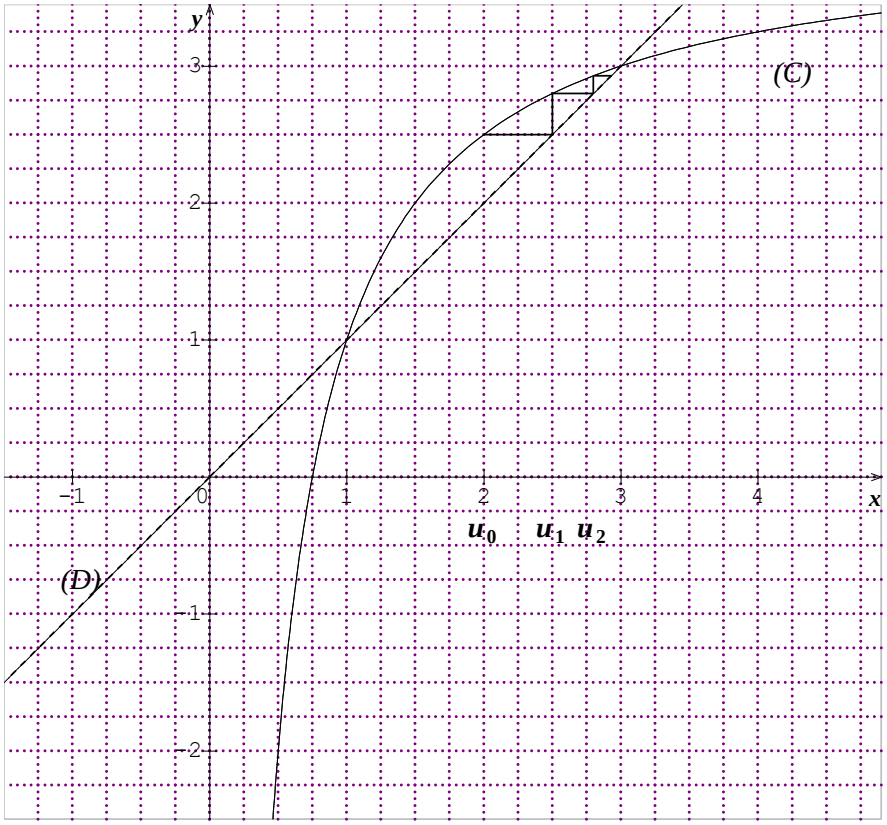
$\Leftrightarrow u_n = \frac{-3 + v_n}{v_n - 1}$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-3 + v_n}{v_n - 1} = 3$.

d) La suite (v_n) *est une suite géométrique de raison* $\frac{1}{3}$ *et de premier terme* $v_0 = -1$

donc : $\forall\, n \in IN,\quad v_n = -1\left(\frac{1}{3}\right)^n = -\frac{1}{3^n}$.

e) Comme $u_n = \frac{-3 + v_n}{v_n - 1}$ *et* $v_n = -\frac{1}{3^n}$ *, il vient :* $\forall\, n \in IN,\quad u_n = \frac{3 + \frac{1}{3^n}}{1 + \frac{1}{3^n}}$.



EXERCICES

1 Démontrer par récurrence les propriétés suivantes :
a) $\forall n \in$ IN, $5^n \geq 1 + 4n$.
b) $\forall n \in$ IN, $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2 Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie sur IN.
a) $u_n = -2n^2 + 3n + 5$
b) $u_n = n^3 + 2n + 1$
c) $u_n = \frac{n}{n^2+1}$
d) $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} - n$
e) $u_n = e^{-n} + n$
f) $u_n = 3\left(\frac{7}{8}\right)^n$.

3 On considère la suite (u_n) définie par :
$u_0 = 1$ et $\forall n \in$ IN, $u_{n+1} = \frac{u_n^3 + u_n^2 + 1}{1 + u_n^2}$
Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

4 On considère la suite (u_n) définie par :
$u_0 = 1$ et $\forall n \in$ IN, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$
1. Démontrer par récurrence que :
$\forall n \in$ IN, $1 \leq u_n \leq 2$
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

5 Soit f la fonction définie sur $]-2; +\infty[$ par :
$f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$.
1. Démontrer que :
$\forall x \in [0\,;2], f(x) \in [0\,;2]$.
2. Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n)\,, \forall n \in IN \end{cases}$$

a) Démontrer par récurrence que :
$\forall n \in$ IN, $0 \leq u_n \leq 2$.
3. Démontrer que suite (u_n) est décroissante.

6 Etudier la convergence de la suite (u_n)
a) $u_n = \frac{2n^2 - 5n + 1}{n^2 + 3}$

b) $u_n = 1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} \ldots\ldots + \frac{1}{e^n}$
c) $u_n = 1 + (-\frac{1}{2})^n$ d) $u_n = \frac{4}{3 - 2^n}$
e) $u_n = \ln(n^2 + 1) - \ln(n^3 + 3)$

7 Soit (u_n) la suite définie par :

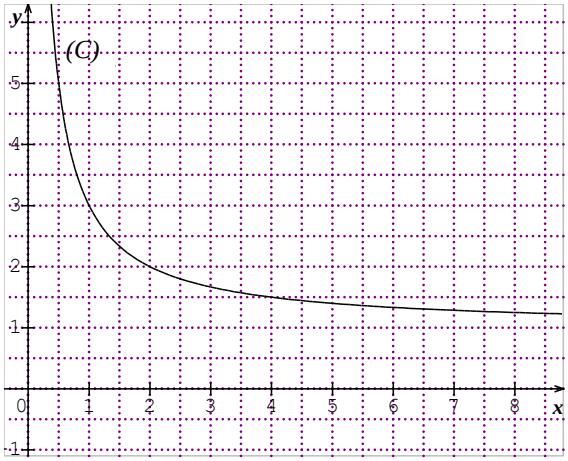
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2\,, \forall n \in \text{IN} \end{cases}$$

1.Placer dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J) les 4 premiers de la suite (u_n) sur (OI) .
2. Démontrer par récurrence que :
$\forall n \in$ IN, $u_n < 3$.
3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
4. On pose: $\forall n \in$ IN, $v_n = u_n - 3$.
a)Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
b) Calculer v_n puis u_n en fonction de n.
Calculer la limite de la suite (u_n).
5.a) Calculer la somme $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ en fonction de n.
b) Calculer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

8 On considère la suite (u_n) définie par :
$u_0 = 1$ et $\forall n \in$ IN, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n - 3$.
1. Déterminer le nombre réel a pour que la suite (v_n) définie sur IN par : $v_n = u_n - a$ soit une suite géométrique.
2. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n
3. Calculer les limites des suites (v_n) et (u_n) .
4. Déterminer un entier naturel p tel que :
$\forall n \geq p, |u_n + 4| \leq 10^{-9}$.
5. Pour tout entier naturel n , on pose
$S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ et
$T_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.
Déterminer une expression de S_n en fonction , puis de T_n en fonction de n.

9 BAC D 2E SESSION 2006
Ci-dessous est représentée la courbe représentative (C) de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2+x}{x}$.
1. Calculer les coordonnées du point d'intersection A de la courbe (C) et de la droite (D) d'équation $y = x$.
2. On considère la suite (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{2 + U_n}{U_n}, \forall n \in \text{IN} \end{cases}$

a) Utiliser la courbe (C) pour représenter U_1, U_2, U_3 et U_4 sur l'axe des abscisses (on laissera les traits de construction en pointillés sur le graphique).
b) A partir du graphique, conjecturer la limite de la suite (U_n).
c) Démontrer par récurrence que :
$\forall\, n \in$IN, $U_n > 0$.
3. On considère la suite (V_n) définie sur IN par :
$V_n = \frac{-2 + U_n}{1 + U_n}$
a)Démontrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
b) Démontrer que : $\forall n \in$ IN, $V_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.
c) En déduire une expression de U_n en fonction de n.
d) Calculer la limite de la suite (U_n).



10 BAC D SESSION 2007

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies par $U_0 = 4$ et $V_0 = 9$ et pour tout entier naturel n :

$U_{n+1} = \frac{2U_nV_n}{U_n + V_n}$ et $V_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + V_n)$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n > 0$ et $V_n > 0$.
2. a) Démontrer que :

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{(V_n - U_n)^2}{2(U_n + V_n)}$.

b) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$U_n \leq V_n$ et que $V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(V_n - U_n)$.

c) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $V_n - U_n \leq \frac{5}{2^n}$.

3. a) Démontrer que la suite (U_n) est croissante et que la suite (V_n) est décroissante.
b) En déduire que les suites (U_n) et (V_n) convergent.
c) Démontrer que les suites (U_n) et (V_n) ont la même limite ℓ.
4. a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $V_{n+1}U_{n+1} = V_nU_n$.
b) En déduire la valeur exacte de ℓ.

11 Soit a un nombre réel différent de 0 et de 1.
La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $\forall\, n \in$ IN, $u_{n+2} = au_{n+1} - (a-1)u_n$
1. Pour quelle valeur de a la suite (u_n) est-elle arithmétique ?
Dans la suite de l'exercice, on suppose $a \neq 2$.
2. Pour tout $n \in$ IN, on pose $v_n = u_{n+1} - u_n$
a)Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
b) Calculer v_n en fonction de n et a.
3.a) Démontrer que :$\forall\, n \in$IN*,
$u_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}$.
b) Calculer u_n en fonction de n et de a.
c) Pour quelle valeurs de a la suite u est-elle convergente ? Préciser alors la limite de la suite u en fonction de a.

12 BAC D SESSION 1998

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies sur IN par : $a_0 = 1$ et $b_0 = 8$
$a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4}$
1.Calculer a_1 et b_1.
2. Soit la suite (d_n) définie sur IN par :
$d_n = b_n - a_n$
a)Démontrer que la suite (d_n) est suite géométrique .
b) Calculer d_n en fonction de n puis démontrer que : $\forall\, n \in$ IN, $d_n > 0$.
c) Calculer la limite de la suite (d_n).
3.a) Démontrer que :
$\forall\, n \in$ IN : $a_{n+1} - a_n = \frac{d_n}{3}$ et
$b_{n+1} - b_n = -\frac{d_n}{4}$
b)En déduire les variations des suites (a_n) et (b_n).
c) Démontrer que : $\forall\, n \in$IN*,
$a_0 < a_n < b_n < b_0$

d) En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.
4.a) Déduire de la question 3)a) que :$\forall\, n \in$IN*, $a_n - a_0 = \frac{1}{3}(d_0 + d_1 + \ldots + d_{n-1})$.
b) En déduire la limite de la suite (a_n) et (b_n).

13 BAC

Soit a un nombre réel donné. On considère les suites (u) et (v) définies respectivement par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \text{ et } v_0 = 5 \\ \forall n \in \text{IN}, u_{n+2} = \frac{1}{2}(a+1)^2 u_{n+1} + u_n \end{cases}$$
$$\forall n \in \text{IN}, v_n = u_{n+1} - u_n$$

1. On pose : a = 1.
a) Démontrer que la suite (v) est constante et donner sa valeur.
b) En déduire que la suite (u) est une suite arithmétique dont la raison est égale à 2.
c) On pose $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.
Exprimer u_n puis S_n en fonction de n.
2. On pose : a = -5.
a) Démontrer que la suite (v) est suite géométrique dont la raison est égale à 7.
b) Exprimer v_n en fonction de n.
c) Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, exprimer en fonction de n la somme T_n où $T_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$.
d) Exprimer u_n en fonction de T_n.
e) En déduire que la suite (u) est divergente.

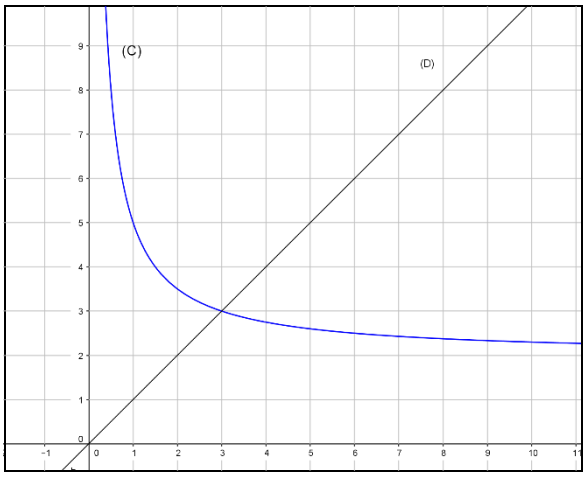
14 On considère la suite (u_n) définie par :
$u_1 = 1$ et $\forall\, n \in$ IN*, $(u_{n+1})^2 = 4u_n$
1. Calculer u_1 , u_2 ,u_3 et u_4 et donner les résultats sous la forme 2^{α}.
2. On considère la suite (v_n) définie par :
$v_n = \ln(\frac{u_n}{4})$.
a)Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique .
b) Calculer v_n et u_n en fonction de n . Préciser alors la limite de la suite u .
3. Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \geq 3{,}99$.

15 BAC D 4E SESSION 2003

Soit a un nombre réel strictement positif.
On considère la suite géométrique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison q et de premier terme U_0 non nul telle que :
$27U_8 = a^3U_5$.
1. Exprimer q en fonction de a.
2. Pour quelles valeurs de a la suite (U_n) est-elle convergente ? Justifier.
3. On pose, pour tout entier naturel n :
$S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$.
Exprimer S_n en fonction de a, U_0 et n .
4. Dans cette partie, on prend a tel que :
$0 < a < 3$.
a) Calculer la limite de la suite (U_n).
b) Sachant que $U_0 = 81$ et $\lim S_n = 243$, calculer a et q.
c) Calculer l'arrondi d'ordre 2 de S_9 .

16 BAC D SESSION 2002

On considère la suite numérique U définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ \forall\, n \in \text{IN}, U_{n+1} = \frac{2U_n + 3}{U_n} \end{cases}.$$
1. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x+3}{x}$ et dont la représentation graphique (C) est donnée ci-dessous.
a) Représenter sur l'axe (OI) les termes U_0, U_1, U_2, U_3 et U_4 de la suite U à l'aide de la courbe (C) et de la droite (D) d'équation $y = x$.
b) Que peut-on conjecturer quant à la convergence de la suite U ?
2. a) Démontrer que $f([1;5]) \subset [1;5]$.
b) En déduire au moyen d'un raisonnement récurrence que :
$\forall\, n \in$IN, $1 \leq U_n \leq 5$.
3. On considère la suite numérique V définie par : $\forall n \in IN, V_n = \frac{U_n - 3}{U_n + 1}$
a)Démontrer que V est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.
b) Démontrer que :
$\forall n \in \text{IN}, V_n = (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{3^n}\right)$.
4. a) Exprimer U_n en fonction de V_n puis en fonction de n .
b) En déduire la limite de la suite U.



17 Une entreprise propose à Mr SORO deux contrats de travail à partir du 1er Janvier 2011.

Contrat A

La première année, il perçoit 100000F.
Chaque 1er Janvier son employeur décide de l'augmenter de10000F.
On désigne par a_0 le salaire mensuel au 1er Janvier 2011.
Pour tout entier naturel n, on désigne par a_n le salaire mensuel au 1er Janvier (2011 + n) .

Contrat B

La première année, il perçoit 100000F.
Chaque 1er Janvier son employeur décide de l'augmenter de 8%.
On désigne par b_0 le salaire mensuel au 1er Janvier 2011.
Pour tout entier naturel n, on désigne par b_n le salaire mensuel au 1er Janvier (2011 + n) .

1. Calculer pour chaque contrat, le salaire mensuel durant les 3 premières années de travail.
2. Calculer a_n et b_n en fonction de n .
3. Quel sera le salaire mensuel de Mr SORO à la 7e année de travail pour chaque contrat ?
4. On pose :

$S = 12(a_0 + a_1 + \cdots + a_{21})$ et
$S' = 12(b_0 + b_1 + \cdots + b_{21})$.

a) Que représente S et S' ?
b) Calculer S et S'. Quel est le contrat le plus avantageux pour Mr SORO ?

18 Le salaire mensuel d'un technicien s'élevait au 1er Janvier 2011 à 150000F.
Chaque 1er Janvier son employeur décide de l'augmenter de 2% et de lui allouer en plus 5000F.
On désigne par S_0 le salaire mensuel au 1er Janvier 2011. Pour tout entier naturel n, on désigne par S_n le salaire mensuel au 1er Janvier (2011 + n) .

1. Calculer S_2.
2. On considère la suite (U_n) définie par :
$\forall n \in$ IN, $U_n = S_n + 250000$.
a) Démontrer que la suite (U_n) est une suite géométrique.
b) Calculer u_n en fonction de n .
3. A partir de quelle année le salaire de ce technicien aura-t-il doublé ?

19 On pose:
$\forall n \in$ IN*, $I_n = \int_1^e x^2(lnx)^n dx$
1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.
2. a) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $\forall n \in IN^*,\ I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3}I_n$
b) Calculer I_2 et I_3.

20 On pose: $I_0 = \int_0^1 e^{-3x} dx$ et
$\forall n \in IN^* I_n = \int_0^1 x^n e^{-3x} dx$
1. Calculer I_0.
2. a) A l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n pour $n \geq 1$.
b) Calculer I_3 .
3. Etudier le sens de variation de la suite (I_n) .
4. En déduire que la suite (I_n) est convergente

8

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

COURS 141

TRAVAUX PRATIQUES 147

EXERCICES 148

COMMENTAIRES

● **Ce thème** vise à :

► étudier la forme des solutions de certaines équations différentielles ;

► modéliser quelques problèmes à l'aide d'une équation différentielle et en déduire une solution.

● **La notion** d'équation différentielle est nouvelle pour les élèves en cours de mathématiques. Cette théorie ne sera donc appréhendée que sur quelques exemples parmi les plus simples.

Les élèves de terminale rencontrent en cours de sciences physiques ces équations à travers l'étude de système physiques ou chimique. Des exemples importants sont :

-les oscillateurs libres (en particulier harmoniques) en mécanique ou en électricité (oscillateur mécaniques, système LC ou RLC) ; la loi de décroissance radioactive.

● **Ce thème** correspond donc à une initiation à une théorie extrêmement importante en analyse et en géométrie. Il n'y a donc pas lieu de développer exagérément cette initiation, mais plutôt de montrer l'importance de ces équations à l'aide de quelques problèmes qui se modélisent sous cette forme. Un des intérêts immédiats du cours de mathématiques sera donc la justification de la nature des solutions de ces équations différentielles.

● **La résolution** des équations différentielles du type $af'' + bf' + cf = g$ où $a, b, et\ c$ sont des

nombres réels non nuls et la théorie qui l'accompagne sont hors programme.

● **Ce thème** comprend deux parties :

► l'établissement des solutions des équations différentielles.

Les trois types d'équation peuvent faire l'objet d'une étude assez poussée en classe.

Ces démonstrations présentent un intérêt incontestable pour les élèves ; recherche des solutions, preuve de l'exhaustivité de cette recherche.

A l'issue de cette mise en place, la forme des solutions doit être utilisée comme un résultat que les élèves n'auront plus alors à justifier. Ces résultats doivent donc être connus des élèves.

► la résolution de problèmes.

Les élèves devront être confrontés à 3 types de problèmes :

- des applications immédiates du cours.
- des équations différentielles qui dépassent leur compétence immédiate, et qu'ils sauront résoudre grâce à un guidage important de l'énoncé (exemple : équation linéaires avec second membre ; recherche d'une solution particulière) ;
- des problèmes géométriques, ou tirés de sciences expérimentales qui se modélisent à l'aide d'équations différentielles au programme. Les exemples choisis devront rester particulièrement simples, n'entraînant pas en particulier de recherche de validité de solutions.

● **La résolution** des équations différentielles n'est pas abordée en détail. Les propriétés présentant les solutions des diverses équations sont admises (sauf peut-être celle du premier ordre qui semble faire l'objet d'une démonstration).

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES
1.Equation différentielle du type $f' = kf$ 2. Equation différentielle du $f'' = 0$ 3. Equation différentielle du type $f'' = kf$	☞ Résoudre une équation différentielle du type $f' = kf$. ☞ Résoudre une équation différentielle du type $f'' = 0$. ☞ Résoudre une équation différentielle du type $f'' = kf$.

ACTIVITÉS

1 On se propose de résoudre l'équation différentielle (E) : $y' + ay = 0$ où a ∈IR.

1. Démontrer que quel que soit le nombre réel k, la fonction f définie sur IR par $f(x) = ke^{-ax}$ est une solution de (E).
2. Nous allons prouver que toute solution de (E) est de la forme $x \longmapsto Ce^{-ax}$, où C est une constante.
Soit g une solution de (E) et φ une fonction dérivable sur IR telle que $\forall x \in$IR, $\varphi(x) = g(x)e^{ax}$.
a) Démontrer que φ est constante.
b) En déduire toutes les solutions de (E).

2 On se propose de résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' - \omega^2 y = 0$ où $\omega \in$IR*.

1. Démontrer que quels que soient les nombres réel a et b , la fonction f définie sur IR par $f(x) = ae^{\omega x} + be^{-\omega x}$ est une solution de (E).
2. Nous allons prouver que toute solution de (E) est de la forme $x \longmapsto \lambda e^{\omega x} + \mu e^{-\omega x}$, où λ et μ sont des constantes.
Soit g une solution de (E) et φ une fonction deux fois dérivable sur IR telle que $\forall x \in$IR, $\varphi(x) = g(x)e^{\omega x}$.
a) Démontrer que $\varphi''(x) - 2\omega\varphi'(x) = 0$.
b) En déduire qu'il existe un nombre réel k, $\varphi'(x) = ke^{2\omega x}$.
b) En déduire toutes les solutions de (E).

3 L'équation différentielle (E) : $y'' + \omega^2 y = 0$ où $\omega \in$IR*.

Démontrer que quels que soient les nombres réel a et b , la fonction f définie sur IR par $f(x) = a\cos\omega x + b\sin\omega x$ est une solution de (E).

COURS

I. GÉNÉRALITÉS

● Une équation différentielle est une équation :
- dont l'inconnue est une fonction (généralement notée $y(x)$ ou simplement y) ;
- dans laquelle apparaisse certaines dérivées de la fonction (y', y'', …).

● y' + 2y $= x^2 - 5$ est une équation différentielle du premier ordre.

Toute fonction f dérivable sur un intervalle ouvert I telle que $f'(x) + 2f(x) = x^2 - 5$ est appelée une solution de cette équation différentielle sur I.

● Résoudre ou intégrer une équation différentielle sur un intervalle ouvert I, c'est déterminer toutes les fonctions solutions de cette équation différentielle.

II. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU TYPE y' + my = 0 (m∈ IR)

Propriété

Les solutions sur IR, de l'équation différentielle y' + my = 0 sont les fonctions $x \mapsto ke^{-mx}$ avec k ∈ IR .

Exemple 1

Résoudre sur IR, les équations différentielles suivantes :

a) y' – 2y = 0 b) y' + 3y = 0 .

Solution

a) *Résolution de (E_1) : y' - 2y = 0*

m = -2 ; donc les solutions de (E_1) sont les fonctions x ↦ k e^{2x} ; avec k ∈IR .

b) *Soit (E_2) : y' + 3y = 0*

m = 3 ; donc les solutions de (E_2) sont les fonctions x ↦ k e^{-3x} ; avec k ∈ IR .

Exemple 2

Dans chacun des cas suivants, déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale donnée :

a) (E) : y' - 4y = 0 et y(0) = 3 ;

b) (E) : y' + $\sqrt{2}$ y = 0 et la courbe représentative de y dans un repère orthonormé admet au point d'abscisse 0 une tangente de coefficient directeur 1.

a) *Soit (E) : y' – 4y = 0 .*

m = - 4, donc les solutions de (E) sont les fonctions x ↦ y(x) = ke^{4x} , k ∈IR .

y(0) = 3 ⇔ k = 3.

Donc la fonction f est définie sur IR par f(x)= $3e^{4x}$.

b) *Soit (E) : y' + $\sqrt{2}$y = 0.*

m = $\sqrt{2}$, donc les solutions de (E) sont les fonctions x ↦y(x) = k $e^{-x\sqrt{2}}$ avec k ∈ IR .

y'(x) = - $\sqrt{2}$ k$e^{-x\sqrt{2}}$. Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0 est $f'(0)$,

Par suite la condition donnée dans l'exercice se ramène à $f'(0) = 1$.

y'(0) = 1 ⇔ - $\sqrt{2}$ k = 1 ⇔ k = - $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc la fonction f est définie sus IR par f(x)= $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-x\sqrt{2}}$.

Exercice

1. Résoudre sur IR, l'équation différentielle : $5y' = 2y$.
2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale donnée :
(E) : $y' - 5y = 0$; $y(2) = 7$.

III. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU TYPE y'' + my = 0 (m ∈ IR)

Propriétés

Équations de référence (ω réel non nul)	Fonctions solutions (A, B nombres réels quelconques)
$y'' = 0$	$x \mapsto Ax + B$
$y'' - \omega^2 y = 0$	$x \mapsto Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$
$y'' + \omega^2 y = 0$	$x \mapsto A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$

Exemples 1

Résoudre sur IR, les équations différentielles suivantes :

a) y'' – 4y = 0 ; b) y'' + 9y = 0 ; c) $y'' - y = 0$; d) $f''(x) + f(x) = 0$.

Solution

a) Résolution de (E_1) : y'' – 4y = 0.

Cette équation est de la forme $y'' - \omega^2 y = 0$ avec $\omega = 2$, donc les solutions de (E_1) sont les fonctions : $x \mapsto Ae^{2x} + Be^{-2x}$; A ∈IR et B ∈IR.

b) Résolution de (E_2) : y'' + 9y = 0 .

Cette équation est de la forme $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega = 3$, donc les solutions de (E_2) sont les fonctions $x \mapsto A\cos(3x) + B\sin(3x)$; avec A∈IR et B∈IR.

c) Résolution de (E_3) : y'' – y = 0.

Cette équation est de la forme $y'' - \omega^2 y = 0$ avec $\omega = 1$, donc les solutions de (E_3) sont les fonctions : $x \mapsto ae^{x} + be^{-x}$; a ∈IR et b ∈IR.

d) Résolution de (E_4) : $f''(x) + f(x) = 0$.

Cette équation est de la forme $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega = 1$, donc les solutions de (E_4) sont les fonctions : $x \mapsto k\cos(x) + l\sin(x)$; avec $k \in IR$ et $l \in IR$.

Exemples 2

Dans chacun des cas suivants, déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition donnée :

a) $25y'' - 16y = 0$ et $y'(0) = y(0) = 1$.

b) $y'' + y = 0$ et la courbe représentative de f dans un repère orthonormé passe par le point $A(\frac{\pi}{2} ; 1)$ admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Solution

a) L'équation différentielle (E) : $25y'' - 16y = 0$ équivaut à $y'' - \frac{16}{25}y = 0$.

Cette équation est de la forme $y'' - \omega^2 y = 0$ avec $\omega = \frac{4}{5}$, donc les solutions de (E) sont les fonctions : $x \mapsto Ae^{\frac{4}{5}x} + Be^{-\frac{4}{5}x}$; $A \in IR$ et $B \in IR$.

Déterminons la solution f vérifiant les conditions f'(0) = f(0) = 1 :

f étant de la forme $x \mapsto Ae^{\frac{4}{5}x} + Be^{-\frac{4}{5}x}$ on a : $f(0) = 1 \Leftrightarrow A + B = 1$.

Par ailleurs, $f'(x) = \frac{4}{5}Ae^{\frac{4}{5}x} - \frac{4}{5}Be^{-\frac{4}{5}x}$ et on a : $f'(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{5}A - \frac{4}{5}B = 1$.

La résolution du système $\begin{cases} A + B = 1 \\ \frac{4}{5}A - \frac{4}{5}B = 1 \end{cases}$ donne $A = \frac{9}{8}$ et $B = -\frac{1}{8}$.

Ainsi, la solution f est définie par : $f(x) = \frac{9}{8}e^{\frac{4}{5}x} - \frac{1}{8}e^{-\frac{4}{5}x}$.

b) Résolution de l'équation différentielle (E) : $y'' + y = 0$

Cette équation est de a forme $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $= 1$, donc les solutions de (E) sont les fonctions : $x \mapsto A\cos x + B\sin x$; $A \in IR$ et $B \in IR$.

Déterminons la solution f vérifiant les conditions données dans cette question :

La courbe de f passe par $A\left(\frac{\pi}{2} ; 1\right)$ si et seulement si $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

La courbe de f admet au point A une tangente parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

f étant de la forme $x \mapsto A\cos x + B\sin x$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow B = 1$.

Par ailleurs, $f'(x) = -A\sin x + B\cos x$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow -A = 0$, $soit\ A = 0$.

f est donc définie sur IR par $f(x) = \sin x$.

TRAVAUX PRATIQUES

EXERCICE RÉSOLU 1

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 3y = 2e^{-x}$.

1. Déterminer le nombre réel a pour que la fonction g définie sur IR par $g(x) = ae^{-x}$ soit solution de (E).

2. Résoudre sur IR l'équation différentielle (E') : $y' + 3y = 0$.

3. Démontrer qu'une fonction f est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $f - g$ est solution de l'équation différentielle (E').

4. En déduire les solutions de (E) .

Solution

1. Pour tout nombre réel x, $g(x) = ae^{-x}$; $g'(x) = -ae^{-x}$.

g *est solution de* (E) $\Leftrightarrow g'(x) + 3g(x) = 2e^{-x}$

$\Leftrightarrow -ae^{-x} + 3ae^{-x} = 2e^{-x}$

$\Leftrightarrow 2ae^{-x} = 2e^{-x} \Leftrightarrow a = 1.$

Donc pour tout $x \in IR$, $g(x) = e^{-x}$.

2. Les solutions sur IR de (E') sont les fonctions $x \mapsto ke^{-3x}$, $k \in IR$.

3.la fonction $f - g$ est une solution de (E') $\Leftrightarrow (f - g)'(x) + 3(f - g)(x) = 0$

$\Leftrightarrow f'(x) - g'(x) + 3f(x) - 3g(x) = 0$

$\Leftrightarrow f'(x) + 3f(x) = g'(x) + 3g(x)$

$\Leftrightarrow f'(x) + 3f(x) = 2e^{-x}$ *car* $g'(x) + 3g(x) = 2e^{-x}$

Ainsi : $f - g$ est une solution de (E') $\Leftrightarrow f$ *est solution de* (E).

4. D'après la question précédente f est solution de (E) si et seulement si la fonction $f - g$ est solution de (E') .Or les solutions de (E') sont les fonctions $x \mapsto ke^{-3x}$, $k \in IR$.

Donc $f(x) - g(x) = ke^{-3x}$; $k \in IR$.

D'où $f(x) = g(x) + ke^{-3x}$; $k \in IR$

Les solutions sur IR de (E) sont les fonctions $f : x \mapsto e^{-x} + ke^{-3x}$; $k \in IR$.

EXERCICE RÉSOLU 2

Au début de la croissance de certaines espèces végétales (telles que le coton, le maïs), on estime que le poids de la plante varie proportionnellement à lui-même. Pour une espèce donnée de coton, le poids P (en g par jour) varie en fonction du temps t (en jours) selon l'équation P'(t) = 0,18P(t). Sachant que le poids de la plante après un jour est de 2g, quel est son poids après 30 jours.

Solution

$P'(t) = 0{,}18P(t) \Leftrightarrow P'(t) - 0{,}18P(t) = 0 \Leftrightarrow P(t) = ke^{0,18t}, k \in IR.$

$P(1) = 2 \Leftrightarrow ke^{0,18} = 2 \Leftrightarrow k = 2e^{-0,18}$

Donc $P(t) = 2e^{-0,18} \times e^{0,18t} = 2e^{0,18t-0,18}$.

$P(30) = 2e^{0,18\times 30-0,18} \Leftrightarrow P(30) \approx 370g.$

Donc au bout de 30 jours la plante pèsera 370g.

EXERCICES

1 Résoudre sur IR les équations différentielles suivantes :

a) $2y' + y = 0$; b) $y' = -\frac{1}{2}y$;

c) $2y' - \sqrt{2}\,y = 0$; d) $y' - 4y = 0$;

e) $5y' + 4y = 0$; f) $y' = 3y$.

2 Résoudre sur IR chacune des équations différentielles suivantes et déterminer la solution vérifiant la condition initiale donnée.

a) $y' + 2y = 0 \; et \; y(0) = 1$;

b) $7y' + 4y = 0 \; et \; y(7) = e^7$;

c) $y' - 5y = 0 \; et \; y(2) = 7$;

d) $y' - \pi y = 0 \; et \; \ln\big(y(2)\big) = \pi$;

e) $2y' - 3y = 0 \; et \; y(2) = e$;

f) $y' + \sqrt{2}y = 0 \; et \; y'(0) = 1$.

3 1. Résoudre dans IR l'équation différentielle (E') : $y'' - 4y = 0$.

2. Soit l'équation différentielle :

(E) : $y'' - 4y = 4(x-1)^2 - 2$.

a) Déterminer un polynôme P de degré 2 solution de (E).

b) Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction $f - P$ est solution de (E').

c) En déduire les solutions de (E).

d) Déterminer la solution φ de (E) qui vérifie $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$.

4 On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = e^{-2x}$.

1. Vérifier que la fonction $g : x \mapsto (x+1)\,e^{-2x}$ est solution de (E) .

2.a) Démontrer qu'une fonction $f + g$ est solution de (E) si et seulement si f est solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$.

b) Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' + 2y = 0$.

c) En déduire les solutions sur IR de (E).

d) Déterminer la solution h de (E) qui vérifie h(ln2) = 1.

5 Dans une culture de microbes qui se développent, la vitesse d'accroissement à l'instant t est proportionnelle à la quantité de microbes à cet instant.

Sachant qu'il y a 10^5 microbes au bout de 2 heures et 5.10^5 microbes au bout de 6 heures, combien y avait-il initialement de microbes dans cette culture ?

6 Déterminer une équation de la courbe (C) passant par le point A(1 ;1) et telle qu'en chacun des points M de (C) la tangente ait un

coefficient directeur double du carré de l'ordonnée de M.

7 Le mouvement d'un mobile est défini par l'équation différentielle suivante:

$\frac{dv}{dt} = -kv$ où k est une constante, t le temps exprimé en seconde et v la vitesse du mobile exprimée en m/s.

A l'instant t = 0, v = 20, pour

k = $0{,}5 \times 10^{-3}$.

1. Déterminer v en fonction de t.

2. Calculer la valeur de t pour v = 10.

3. Calculer la distance entre les deux positions du mobile correspondant aux vitesses 20 et 10.

8 **PARTIE A**

On considère sur IR, l'équation différentielle (E) : $f'(x) - 2f(x) = xe^x$.

1. Démontrer que la fonction u définie sur IR par : $u(x) = -(x+1)e^x$ est solution de (E).

2. Résoudre sur IR, l'équation différentielle (E') : $f'(x) - 2f(x) = 0$.

3. Démontrer qu'une fonction v est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de l'équation différentielle (E').

4. En déduire que les solutions de (E) sont les fonctions f_k définies sur IR par : $f_k(x) = ke^{2x} - (x+1)e^x$ avec k un nombre réel quelconque.

5. En déduire la solution de (E) qui s'annule en 0.

PARTIE B

Soit g la fonction dérivable sur IR et définie par : $g(x) = -x - 2 + 2e^x$.

1. Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$

2. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

3.a)Calculer $g(0)$.

b) Démontrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique α dans $]-\infty ; -\ln 2[$.

c) Justifier que -1,6 < α < -1,5.

4. Justifier que :

$\forall x \in]-\infty ; \alpha[\cup]0 ; +\infty[, g(x) > 0$;

$\forall x \in]\alpha ; 0[, g(x) < 0$.

PARTIE C

Soit f la fonction dérivable sur IR et définie par :

$f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J).Unité : 2 cm .

1. Calculer la limite de f en $-\infty$.

Interpréter graphiquement le résultat.

2. Calculer les limites de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Interpréter graphiquement les résultats.

3a) Démontrer que :

$\forall x \in IR, f'(x) = e^x g(x)$.

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4.a) Démontrer que : $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2+2\alpha}{4}$.

b) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

5. Tracer (C).

6. Soit un nombre réel t tel que $t < 0$.

a) Calculer à l'aide d'une intégration par parties, l'aire $A(t)$ en cm^2 de la partie du plan limitée par (C) , (OI) et les droites d'équations respectives $x = t$ et $x = 0$.

b) Calculer la limite de $A(t)$ lorsque t tend vers $-\infty$.

9

NOMBRES COMPLEXES

COURS 152

TRAVAUX PRATIQUES 176

EXERCICES 180

COMMENTAIRES

● **Ce chapitre vise à** :

► définir l'ensemble des nombres complexes et en dégager les règles de calcul ;

► utiliser les caractérisations complexes pour interpréter des configurations élémentaires du plan ;

► utiliser les nombres complexes pour résoudre des problèmes.

● **La notion** de nombres complexes est nouvelle pour les élèves. La construction de l'ensemble $\mathbb{C}$ n'est pas au programme, on pourra en faire une présentation historique.

On fera ressortir l'intérêt entre les propriétés des complexes et celles des configurations géométriques ainsi que celui de l'utilisation de l'outil « nombres complexes » dans la résolution de problèmes géométriques.

Il ne s'agit pas de faire une théorie sur les transformations et leurs écritures complexes, mais d'utiliser ces écritures.

L'acquisition des propriétés des nombres complexes pourra être vérifiée par des exercices de méthodes dépourvues de lourdeur de calculs.

● **L'écriture** exponentielle sera utilisée le plus tôt possible afin d'alléger les expressions dans les calculs.

● **La linéarisation** des fonctions trigonométriques sera réinvestie dans le calcul intégral.

Pour la linéarisation des puissances de cosx et sinx, on se limitera à des exposants peu élevés.
● **On pourra** amener les élèves à trouver les n racines n-ièmes d'un nombre complexe connaissant une racine et les racines n-ièmes de l'unité.
● **Le tableau** configurations du plan et nombres complexes est essentiel dans le traitement des exercices de géométrie avec l'outil nombres complexes.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES
I. Ensemble des nombres complexes 1.Forme algébrique d'un nombre complexe 2. Somme, produit, quotient 3.Conjugué d'un nombre complexe 4.Formule du binôme 5.Egalité de deux nombres complexes 6. Module et arguments 7.Forme trigonométrique 8.Forme exponentielle 9.Point image et vecteur image II. Nombres complexes et trigonométrie Formules de Moivre et d'Euler III. Equations 1. Racines carrées d'un nombre complexe non nul. 2. Equations du second degré 3. Racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul. 4. Racines n-ièmes de l'unité. IV. Nombres complexes et géométrie $\arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_D}\right)$ est une mesure de $\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BA}\right)$ Caractérisations complexes - d'un cercle - d'une droite	☞ Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe. ☞ Calculer la somme, le produit, le quotient de deux nombres complexes donnés sous forme algébrique. ☞ Développer $(a+b)^n$ ☞ Déterminer le conjugué d'un nombre complexe. ☞ Déterminer le module et un argument d'un nombre complexe non nul. ☞ Représenter graphiquement un nombre complexe donné sous forme algébrique. ☞ Calculer le produit et le quotient de deux nombres complexes donnés sous forme trigonométrique. ☞ Passer de la forme trigonométrique à la forme algébrique et inversement. ☞ Utiliser les formules de Moivre et d'Euler pour : - retrouver des formules trigonométriques ; - linéariser des puissances de cosx et sinx. ☞ Déterminer les racines carrées d'un nombre complexe écrit sous forme algébrique. ☞ Résoudre une équation du second degré ou une équation s'y ramenant. ☞ Déterminer sous forme trigonométrique les racines n-ièmes d'un nombre complexe et les représenter graphiquement. ☞ Démontrer que des points sont cocycliques. ☞ Démontrer que des points sont alignés. ☞ Utiliser les caractérisations complexes pour : - justifier une propriété géométrique ; - déterminer des lieux géométriques.

COURS

I. ENSEMBLE DES NOMBRES COMPLEXES

1. Présentation

Théorème et définition

■ Il existe un ensemble $\mathbb{C}$ contenant IR et vérifiant :
- il existe dans $\mathbb{C}$ un élément noté $\boldsymbol{i}$ tel que : $\boldsymbol{i^2 = -1}$.
- tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de façon unique sous la forme $\boldsymbol{a + ib}$, où a et b sont des nombres réels.
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent l'addition et la multiplication de IR, et qui suivent les mêmes règles de calcul.

■ On appelle nombre complexe tout élément de l'ensemble $\mathbb{C}$.

Exemples

$2i;\ 3-4i;\ 1;\ 0;\ \sqrt{3}\ +\ 4{,}5i;\ -20$ *sont des nombres complexes.*

Vocabulaire et notations

● L'écriture $z = a + ib$ où a et b des nombres réels, est appelée forme algébrique de z.

a est appelée **partie réelle** de z, on note $\mathrm{Re}(z) = a$;

b est appelé **partie imaginaire** de z et on note $\mathrm{Im}(z) = b$.

● On appelle nombre **imaginaire pur** tout nombre complexe z tel que $\mathrm{Im}(z) = 0$.

Exemples

● Soit les nombres complexes suivants: $z = -1 + 2i;\ u = 3i;\ v = 1$. Donc :

$\mathrm{Re}(z) = -1$ et $\mathrm{Im}(z) = 2$; $\mathrm{Re}(u) = 0$ et $\mathrm{Im}(u) = 3$; $\mathrm{Re}(v) = 1$ et $\mathrm{Im}(v) = 0$.

$\mathrm{Re}(0) = \mathrm{Im}(0) = 0$.

● Les nombres complexes $3i\ ;\ -\frac{2}{5}i\ ;\ 0$ sont des nombres imaginaires purs.

Exercice

Soit $u = 1 + 2i$ et $v = 3 - i$.

Calculez sous forme algébrique les nombres complexes suivants : $u + v\ ;\ u - v\ ;\ -4u + 3v\ ;\ uv\ ;\ u^2;\ u^3$.

3. Egalité de deux nombres complexes

Propriétés

Pour tous nombres complexes z et z' :
● z = z' ⇔ Re(z) = Re(z') et Im(z) = Im(z') ;
● z = 0 ⇔ Re(z) = Im(z) = 0.

Exemple

Déterminer les nombres réels $x\ et\ y$ pour que l'on ait : $x + i(y-1) = 2i$.

$x + i(y-1) = 2i \Leftrightarrow x = 0\ et\ y - 1 = 2$
$\Leftrightarrow x = 0\ et\ y = 3.$

Exercice
Soit u = 1-6i.
Déterminer les nombres réels x et y pour que le nombre complexe v = x+y + xyi soit égal à u.

4. Inverse d'un nombre complexe non nul

Propriétés

■ Tout nombre complexe non nul $z = a + ib$ où a et b sont des nombres réels admet un inverse qui est le nombre complexe noté $\frac{1}{z}$ tel que : $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$.
■ Soit z et z' deux nombres complexes avec z' ≠ 0, alors : $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$

Remarque : Il n'est pas nécessaire de retenir la formule. Pour calculer $\frac{1}{a+ib}$ on multiplie le numérateur et le dénominateur par a-ib et on utilise l'égalité : **(a+ib)(a-ib) = $a^2 + b^2$**

Exemple 1

Soit z = 2 -5i . Ecrire l'inverse de z sous forme algébrique.

On a : $\frac{1}{z} = \frac{1}{2-5i} = \frac{1+5i}{(2-5i)(2+5i)} = \frac{1+5i}{4+25} = \frac{1}{29} + \frac{5}{29}i$.

Exemple 2

Soit z = $\frac{2+i}{3-4i}$. Ecrire z sous forme algébrique.

On a : $z = \frac{2+i}{3-4i} = \frac{(2+i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{2+11i}{25} = \frac{2}{25} + \frac{11}{25}i$.

Exercice
Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants : $\frac{1}{1+2i}$; $\frac{-1+3i}{3-i}$; $\frac{1}{2i}$; $\frac{3i}{1-i} - \frac{5-3i}{i-3}$.

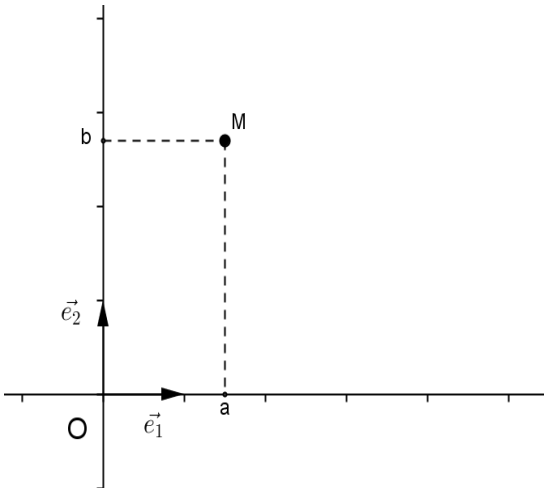
5. Représentation géométrique

Définitions

■ Le plan $\mathbb{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ appelé **plan complexe**.

■ Au nombre complexe $z = a + ib$ (avec a et $b$desnombres réels), on associe le point M$(a ; b)$.
On dit que :
M est le **point-image** de z ;
z est l'**affixe** de M ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$.
On note M(z) ou $\overrightarrow{OM}(z)$
et z est souvent noté z_M ou $z_{\overrightarrow{OM}}$.

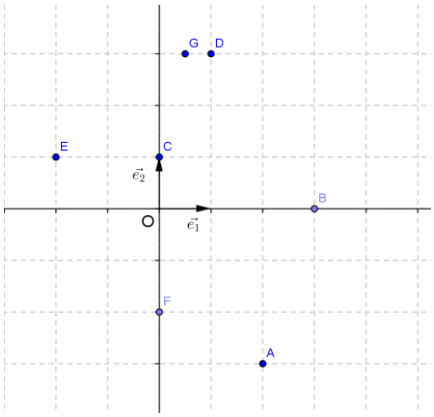
■ Au vecteur $\vec{V}$ de coordonnées $(a; b)$, on associe le nombre complexe $a + ib$.
On dit que $a + ib$ est l'affixe de $\vec{V}$ et que $\vec{V}$ est le **vecteur image** de $a + ib$.



Pour toute la suite, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

Exemple

Représenter les points A, B, C, D, E, F et G d'affixes respectives $2 - 3i$; i ; 3 ; 1+3i ; -2+i ; -2 et $\frac{1}{2} + 3i$.



Propriétés 1

■ Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixes respectives z et z' et k un nombre réel.
$\vec{u} + \vec{v}$ a pour affixe z + z' ;
k$\vec{u}$ a pour affixe kz .

Propriétés 2

■ Soit M et M' les points d'affixes respectives z et z'.
$\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe z'−z .
Si I est le milieu de [MM'] alors : $z_I = \frac{z_M + z_{M'}}{2}$

■ Si G est le barycentre des points pondérés (A ; a), (B ;b) et (C ;c) avec $a + b + c \neq 0$ alors $z_G = \frac{aZ_A + bZ_B + cZ_C}{a+b+c}$.

Exemple

1. Placer dans le plan complexe les points R, S, T, U d'affixes respectives :
$3 + i\,;\ 2 + 4i\,;\ -2 + i\,;\ -1 - 2i.$
2. Démontrer que le quadrilatère RSTU est un parallélogramme.
3. Déterminer l'affixe de K milieu du segment [RT].
4. Calculer l'affixe du centre de gravité G du triangle RST.

Solution

1. Voir figure.

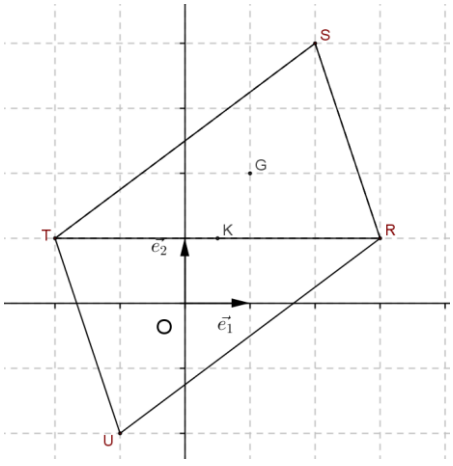
2.Le vecteur $\overrightarrow{RS}$ a pour affixe $z_S - z_R = 2 + 4i - 3 - i = -1 + 3i.$

Le vecteur $\overrightarrow{UT}$ a pour affixe $z_T - z_U = -2 + i + 1 + 2i = -1 + 3i.$

Nous avons : $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{UT}$, donc le quadrilatère RSTU est un parallélogramme.

3. Le point K a pour affixe : $z_K = \frac{z_R + z_T}{2} = \frac{3+i-2+i}{2} = \frac{1}{2} + i$.

4. On a $z_G = \frac{3+i+2+4i-2+i}{3} = \frac{3+6i}{3} = 1 + 2i$.



6. Conjugué d'un nombre complexe

Définition

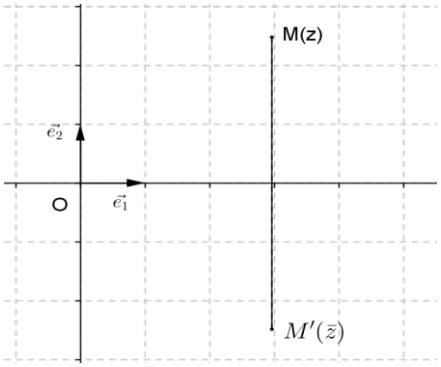
Soit z = a + ib (avec a et b des nombres réels).
On appelle **conjugué de z** le nombre complexe noté $\bar{z}$ tel que **:** $\bar{z} = a - ib$.

Exemple

$\overline{3-2i} = 3+2i$; $\overline{-4} = -4$; $\overline{5i+3} = 3-5i$; $\overline{3i} = -3i$.

Interprétation géométrique :

Les points M(z) et M'($\bar{z}$) sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.



Exercice

Déterminer les conjugués des nombres complexes suivants :

$z_1 = 4+5i$; $z_2 = 4$; $z_3 = -\frac{3}{2}i$; $z_4 = i\sqrt{17} - 243$.

Propriétés

Pour tous nombres complexes z et z' et tout nombre entier naturel n non nul:

$\bar{\bar{z}} = z$; $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$; $\overline{z-z'} = \bar{z} - \bar{z'}$; $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}$; $\overline{z^n} = \bar{z}^n$; $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z'}}$ et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ avec z' ≠ 0 ;

$z\bar{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2$;

$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$;

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$;

z est un nombre imaginaire pur $\Leftrightarrow \bar{z} = -z$.

Remarque : *Si* $z \neq 0$ alors $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$.

Exercice

Déterminer les conjugués des nombres complexes suivants :$(1-3i)(2+5i)$; $\frac{1+i\sqrt{3}}{2-i}$; $(1+i)^3$.

II. MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE

1. Définition

Soit z = a + ib (avec a et b des nombres réels).

On appelle **module de z** le nombre réel positif noté **|z|** tel que **:** $|\mathbf{z}| = \sqrt{\mathbf{a^2 + b^2}} = \sqrt{z\bar{z}}$.

Exemple 1

Calculer le module des nombres complexes suivants : 3+4i ; i ; -2i ; 1-4i ; -5 ; $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

On a : $|3+4i| = \sqrt{9+16} = 5$; $|i| = \sqrt{1} = 1$; $|1-4i| = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$; $|-5| = \sqrt{25} = 5$;

$\left|\frac{\mathbf{1-i\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}\right| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1.$

Interprétation géométrique

- Si M a pour affixe z alors **:** $|z| = OM$.
- Si A et B ont pour affixes respectives z_A et z_B alors : $AB = |z_B - z_A|$.

Exemple 2

Soit A le point d'affixe 32 + 24i. Calculer OA.

On a : OA $= |6+24i| = \sqrt{1024+576} = 40$.

Exemple 3

Soit A, B et C les points d'affixes respectives : -1 ; $3-2i$; $1+4i$.

Démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.

Solution

On a : $AB = |4-2i| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$; $AC = |2+4i| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$;

$BC = |-2+6i| = 2\sqrt{10}$.

On a AB = AC et $AB^2 + AC^2 = 40 = BC^2$. *Donc le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.*

Exemple 4

Soit A et B les points d'affixes respectives $-2+i$ et -3 .

1. Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M d'affixes *z* tels que : $|z+2-i| = 4$.

2. Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M d'affixes *z* tels que : $|z+2-i| = |z+3|$.

Solution

Soit M(z).

1. On a : $M \in (E) \Leftrightarrow |z+2-i| = 4$

$\Leftrightarrow |z-(-2+i)| = 4$

$\Leftrightarrow |z_M - z_A| = 4$

$\Leftrightarrow MA = 4$.

Donc (E) est le cercle de centre A et de rayon 4.

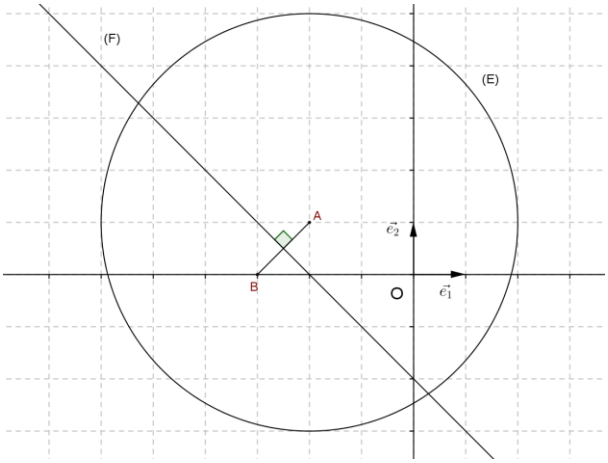
2. On a : $M \in (F) \Leftrightarrow |z+2-i| = |z+3|$

$\Leftrightarrow |z-(-2+i)| = |z-(-3)|$

$\Leftrightarrow |z_M - z_A| = |z_M - z_B|$

$\Leftrightarrow MA = MB$.

Donc (F) est la médiatrice du segment [AB].



Exercice 1

Calculer le module des nombres complexes suivants : $2i-5$; $1+i\sqrt{3}$, i; -3; $3i$.

Exercice 2

Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M d'affixes z tels que : $|z+2i| = 3$.

Exercice 3

Soit (Γ) des points M d'affixes z tels que : $\left|\frac{3+i\sqrt{3}}{4}z-3+i\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}$.

Démontrer que (Γ) est le cercle de centre A(2 ;-2$\sqrt{3}$) et de rayon 2.

3. Modules et opérations

Propriétés

Pour tous nombres complexes z et z' et tout entier naturel n non nul:

$|\bar{z}| = |z|$; $z\bar{z} = |z|^2$;

$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;

$|zz'| = |z||z'|$; $|z^n| = |z|^n$; $\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$ et $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ avec $z' \neq 0$;

$|z+z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire) .

Exemple

Soit u = $\frac{1+i}{(\sqrt{3}-i)^5}$. Calculer le module de u.

$|1+i| = \sqrt{2}$; $|\sqrt{3}-i| = 2$ *donc* $|u| = \frac{\sqrt{2}}{32}$.

Exercice

On donne $z_1 = 1 + i$; $z_2 = -\sqrt{3} + i$

Calculer le module de chacun des nombres complexes : z_1 ; $\overline{z_1}$; z_2 ; $z_1 \times z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $(z_2)^5$.

III. ARGUMENTS D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

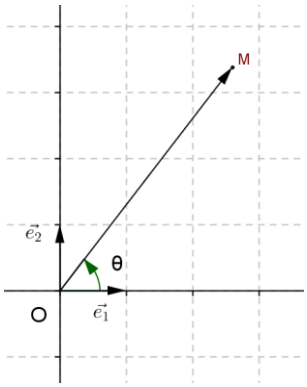
1. Définition

Le plan est muni du repère orthonormé direct (O; $\vec{e_1}, \vec{e_2}$).
Soit z un nombre complexe non nul et M le point- image de z.

■ On appelle **argument de z** et on note **arg(z)** toute mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{e_1}, \overrightarrow{OM}})$.

Si θ est une mesure de $(\widehat{\vec{e_1}, \overrightarrow{OM}})$, on écrit : arg(z) = θ + 2kπ, (k ∈ℤ).

■ On appelle **argument principal de z** et on note **Arg(z)** la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\vec{e_1}, \overrightarrow{OM}})$.



NB : L'argument de 0 n'est pas défini.

Exemples

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O,I,J).

Le point-image du nombre complexe i est J donc : $Arg(i) = Mes(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}}) = \frac{\pi}{2}$.

De même, on détermine l' argument principal de chacun des nombres complexes suivants en considérant leurs points- image et en appliquant la définition :

Arg(i) $= \frac{\pi}{2}$; *Arg(-i)* $= -\frac{\pi}{2}$; *Arg(1) = 0 ;*
Arg(-1) $= \pi$; *Arg(1+i)* $= \frac{\pi}{4}$; *Arg(1-i)* $= -\frac{\pi}{4}$; *Arg(-5)* $= \pi$.

2. Argument d'un nombre réel non nul, argument d'unnombre imaginaire pur non nul

Propriétés

Soit z un nombre complexe non nul.
■ $z \in IR_+^*$ $\Leftrightarrow$ Arg(z) = 0 ;
■ $z \in IR_-^*$ $\Leftrightarrow$ Arg(z) = π ;
■ $z \in IR^*$ $\Leftrightarrow$ arg(z) = kπ ,($k \in \mathbb{Z}$);
■ Si z = ib, avec $b \in IR_+^*$ alors Arg(z) = $\frac{\pi}{2}$;
■ Si z = -ib, avec $b \in IR_+^*$ alors Arg(z) = $-\frac{\pi}{2}$;
■ z est un imaginaire pur non nul $\Leftrightarrow$ arg(z) = $\frac{\pi}{2}$ + kπ , ($k \in \mathbb{Z}$).

Exercice
Déterminer l'argument principal de chacun des nombres complexes suivants :
$10\ ;\ -\pi\ ;\ 3i\ ;\ -2{,}5i\ ; -2011\ ;\ 3\pi.$

3. Egalité de deux nombres complexes non nuls

Propriété

Soit z *et* z' deux nombres complexes non nuls :
$z = z' \Leftrightarrow \ |z| = |z'|$ et $\arg(z) = \arg(z') + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

4. Forme trigonométrique

Propriétés et définition

■Tout nombre complexe non nul z peut s'écrire sous la forme : **z = r(cos θ + isin θ)**
avec r = |z| et θ un argument de z.
On dit que **r(cos θ + isin θ) est la forme trigonométrique de z.**
■ Si z = r(cos θ + isin θ) avec $r \in IR_+^*$ et $\theta \in IR$ alors r = |z| et θ = arg(z) + 2kπ ; $k \in \mathbb{Z}$

Exemples

On a : $|1+i| = \sqrt{2}$ *et* $Arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$ *donc :* $1+i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$.
On a : $|i| = 1$ *et* $Arg(i) = \frac{\pi}{2}$ *donc :* $i = 1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$.
On a : $-3 = 3(\cos\pi + i\sin\pi)$.

Exercice 1

Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants : 3i ; -i ; -1 ; 5 ; 3-3i.

Exercice 2

Soit u le nombre complexe tel que $|u| = 2 \ et \ \text{Arg}(u) = \frac{3\pi}{4}$.

Ecrire u sous forme algébrique.

Propriété

Soit z un nombre complexe non nul tel que :

z = a + ib avec des nombres réels a et b tels que $(a\,;b) \neq (0\,;0)$.

Si z = $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ (forme trigonométrique) alors $\begin{cases} r = \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\theta = \frac{a}{r} \\ \sin\theta = \frac{b}{r} \end{cases}$

Exemple

Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants : u = $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; v = $-\sqrt{3} + i$; w = $\sqrt{6} + i\sqrt{2}$.

Solution

- *On a :* $|u| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$; *soit* $\theta = Arg(u)$, *on a :* $\begin{cases} cos\theta = \frac{1}{2} \\ sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ *donc* $\theta = -\frac{\pi}{3}$.

Donc : $u = cos(-\frac{\pi}{3}) + isin(-\frac{\pi}{3})$.

- *On a :* $|v| = \sqrt{3+1} = 2$; *soit* $\alpha = Arg(v)$, *on a :* $\begin{cases} cos\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ sin\alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$ *donc* $\alpha = \frac{5\pi}{6}$

Donc : $v = 2(cos\ \frac{5\pi}{6} + isin\ \frac{5\pi}{6})$.

- *On a :* $|w| = \sqrt{6+2} = 2\sqrt{2}$;

soit $\beta = Arg(w)$, *on a :* $\begin{cases} cos\beta = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \end{cases}$ *donc* $\beta = \frac{\pi}{6}$.

Donc : $w = 2\sqrt{2}\,(cos\frac{\pi}{6} + isin\ \frac{\pi}{6})$.

NB : La forme trigonométrique peut s'écrire avec un argument quelconque.

Exercice

Donner la forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :

$\sqrt{2} + i\sqrt{6}$; $\sqrt{2} - i\sqrt{6}$; $-3 - 3i$; $-\sqrt{3} + i$; $\frac{2i-2}{1+i}$; $\frac{3+i\sqrt{3}}{4}$.

5. Arguments et opérations

Propriétés

Pour tous nombres complexes non nuls z et z' et pour tout nombre entier relatif n :

- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi$; $(k \in \mathbb{Z})$
- $\arg(-z) = \pi + \arg(z) + 2k\pi$; $(k \in \mathbb{Z})$
- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi$; $(k \in \mathbb{Z})$
- $\arg(\frac{1}{z'}) = -\arg(z') + 2k\pi$ et $\arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi$; $(k \in \mathbb{Z})$
- $\arg(z^n) = n \times \arg(z) + 2k\pi$. $(k \in \mathbb{Z})$

Exemple

Soit $u = -1 + i$ et $v = 1 + i\sqrt{3}$.

a) Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants : uv ; $\frac{1}{v}$; $\frac{u}{v}$; $\bar{u}$.

b) Ecrire v^5 sous forme algébrique.

Solution

a)On a : $|u| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$;

soit θ = Arg(u), on a : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ *donc* $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

Donc : $u = \sqrt{2}\,(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$.

On a : $|v| = \sqrt{1+3} = 2$;

soit α = Arg(v), on a : $\begin{cases} \cos\alpha = \frac{1}{2} \\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ *donc* $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Donc : $v = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$.

On a : $|\frac{1}{v}| = \frac{1}{2}$ *et* $\arg(\frac{1}{v}) = -\arg(v) + 2k\pi = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

Donc : $\frac{1}{v} = \frac{1}{2}(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3}))$.

On a : $|\frac{u}{v}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *et* $\arg(\frac{u}{v}) = \arg(u) - \arg(v) + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$

Donc : $\frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12})$.

b) On a : $|v^5| = 2^5 = 32$ *et* $\arg(v^5) = 5\arg(v) + 2k\pi = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$

$Arg(v^5) = \frac{5\pi}{3} - 2\pi = -\frac{\pi}{3}$

Donc : $v^5 = 32[\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})]$. *On a* $\cos(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ *et* $\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

donc $v^5 = 32(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 16 - 16i\sqrt{3}$.

Exercice 1

Ecrire sous forme trigonométriques les complexes suivants: $-2\left(\cos\frac{9\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{9\pi}{5}\right)$; $\sin\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{4}$.

Exercice 2

$u = 2 + 2i\sqrt{3}$; $v = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $w = uv$

1. Déterminer le module et l'argument principal de u ; v ; w.
2. Ecrire w sous forme algébrique.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.

IV. NOTATION EXPONENTIELLE

1. Définition

Pour tout nombre réel θ, on pose $\mathbf{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$.

Conséquence

Tout nombre complexe non nul z de module r et d'argument θ s'écrit : $\mathbf{z = re^{i\theta}}$.
Cette écriture est appelée forme exponentielle de z.

Exemple 1

Soit z_1 = -3i. On a donc $|z_1| = 3$ et $\mathrm{Arg}(z_1) = -\frac{\pi}{2}$. D'où $z_1 = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

Soit z_2 = 1 + i. On a donc $|z_2| = \sqrt{2}$ et $\mathrm{Arg}(z_2) = \frac{\pi}{4}$. D'où $z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Exemple 2

$e^{i0} = \cos0 + i\sin0 = 1$; $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$; $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$; $2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3}$.

Exemple 3

Ecrire sous forme exponentielle le nombre complexe -1+i .

On a : $|-1+i| = \sqrt{2}$ *;*

soit $\theta = Arg(-1+i)$*, on a :* $cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ *et* $sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *donc* $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

Donc : $-1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Remarques :

− Le conjugué de $e^{i\theta}$ est $e^{-i\theta}$: $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

− Le module de $e^{i\theta}$ est 1 : $|e^{i\theta}| = 1$.

− Si $z = re^{i\theta}$ avec r > 0 alors |z| = r et arg(z) = θ+ 2kπ, (k ∈ ℤ)

Exercice

Ecrire sous forme exponentielle chacun des nombres complexes :

$\sqrt{6} + \sqrt{2}i$; $\sqrt{6} - \sqrt{2}i$; $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$; -5i ; 2.

2. Propriétés

Quels que soient les nombres réels θ et θ' :

$e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$; $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$; $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ ($n \in \mathbb{Z}$).

Exemple

Soit Z = $\frac{(1+i)(\sqrt{3}-i)}{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}$. Ecrire Z sous forme exponentielle puis donner la forme algébrique de Z^{2011} .

♦ *On a :* $|1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$;

soit $\theta = Arg(1+i)$, *on a :* $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *et* $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *donc* $\theta = \frac{\pi}{4}$.*Donc :* $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

♦ *On a :* $|\sqrt{3} - i| = \sqrt{1+3} = 2$;

soit $\alpha = Arg(\sqrt{3} - i)$, *on a :* $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *et* $\sin\alpha = \frac{-1}{2}$ *donc* $\alpha = -\frac{\pi}{6}$. *Donc :* $\sqrt{3} - i = 2e^{i(-\frac{\pi}{6})}$

♦ *On a :* $|\sqrt{2} + i\sqrt{6}| = 2\sqrt{2}$;

soit $\beta = Arg(\sqrt{2} + i\sqrt{6})$, *on a :* $\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ *et* $\sin\beta = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *donc* $\beta = \frac{\pi}{3}$.

Donc : $\sqrt{3} - i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$ *Par suite :* $Z = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \times 2e^{i(-\frac{\pi}{6})}}{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{12}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{i(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{3})} = e^{i(-\frac{\pi}{4})}$,

donc $Z^{2011} = e^{i(-\frac{2011\pi}{4})}$ *or* $-\frac{2011\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + 502\pi$,

donc : $Z^{2011} = e^{i(-\frac{3\pi}{4})} = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 1

$u = 2 - 2i\sqrt{3}$; $v = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $w = uv$; $t = u^5$

1. Ecrire sous forme exponentielle, chacun des nombres complexes , u , v , w , t.
2. En déduire la forme algébrique de t.

Exercice 2

Ecrire sous forme exponentielle le nombre complexe a = $\frac{(1+i)^3(1-i\sqrt{3})}{\sqrt{3}+i}$.

3. Formules de Moivre et d'Euler

Propriétés

Pour tout nombre réel θ et pour tout nombre entier relatif n :

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ (Formule de Moivre).

$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ (Formule d'Euler).

Remarque

Pour tout nombre réel θ et pour tout nombre entier relatif n :

$e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2\cos n\theta$; $e^{in\theta} - e^{-in\theta} = 2i\sin n\theta$.

Exemple 1

Soit u =$\left(cos\frac{\pi}{6}+isin\frac{\pi}{6}\right)^7$.

Donner la forme algébrique de u.

On a : u = $\left(cos\frac{\pi}{6}+isin\frac{\pi}{6}\right)^7 = cos\frac{7\pi}{6}+isin\frac{7\pi}{6} = cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+isin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$.

Exemple 2

Linéariser $f(x) = \sin^3 x$, g(x) = $\cos^4 x$ et h(x) = $\cos^4 x \sin^2 x$.

♦*f(x)* = $(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i})^3$ *On développe à l'aide de la formule du binôme de Newton.*

f(x) = = $\frac{1}{(2i)^3}[\left(e^{ix}\right)^3\left(-e^{-ix}\right)^0+3\left(e^{ix}\right)^2\left(-e^{-ix}\right)^1+3\left(e^{ix}\right)^1\left(-e^{-ix}\right)^2+\left(e^{ix}\right)^0\left(-e^{-ix}\right)^3]$

f(x) = = $\frac{1}{-8i}[\left(e^{i3x}\right) -3\left(e^{i2x}\right)\left(e^{-ix}\right)+3\left(e^{ix}\right)\left(e^{-i2x}\right)-\left(e^{-i3x}\right)]$

f(x) = $\frac{1}{-8i}[(e^{i3x}-e^{-i3x})-3\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)]$ *or* $e^{i3x}-e^{-i3x} = 2isin(3x)$ *et* $e^{ix}-e^{-ix}$ = *2isinx*

donc : f(x) = $\frac{1}{-8i}[2isin(3x) -6isinx] = -\frac{1}{4}sin(3x)+\frac{3}{4}sinx$.

♦*g(x)* = $(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2})^4$

g(x) = = $\frac{1}{16}[\left(e^{ix}\right)^4\left(e^{-ix}\right)^0+4\left(e^{ix}\right)^3\left(e^{-ix}\right)^1+6\left(e^{ix}\right)^2\left(e^{-ix}\right)^2+4\left(e^{ix}\right)\left(e^{-ix}\right)^3+\left(e^{ix}\right)^0\left(e^{-ix}\right)^4]$

g(x) = = $\frac{1}{16}[e^{i4x}+4e^{i2x}+6+4e^{-i2x}+e^{-i4x}]$

g(x) = $\frac{1}{16}\left[(e^{i4x}+e^{-i4x})+4\left(e^{i2x}+e^{-2ix}\right)+6\right]$

or $e^{i4x}+e^{-i4x} = 2cos(4x)$ *et* $e^{i2x}+e^{-i2x}$ = *2sin(2x)*

donc : g(x) = $\frac{1}{16}[2cos(4x)+8\,cos(2x)+6] = \frac{1}{8}cos(4x)+\frac{1}{2}cos(2x)+\frac{3}{8}$.

♦*h(x)* = $(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2})^3(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i})^2 = -\frac{1}{16}\left(e^{i3x}+e^{-i3x}+3e^{ix}+3e^{-ix}\right)(e^{i2x}+e^{-i2x}-2)$

h(x) = $-\frac{1}{16}[\left(e^{i5x}+e^{-i5x}\right)+(e^{i3x}+e^{-i3x})-2\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)]$

h(x) = $-\frac{1}{16}cos5x-\frac{1}{16}cos3x+\frac{1}{8}cosx$.

Exercice

Linéariser $f(x)$ = $\sin^3 2x + cos^2 x$.

V. ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ DANS ℂ

1. Racines carrées d'un nombre complexe

Exemples

Résoudre dans ℂ, les équations :

a) $z^2 = -1$;

b) $z^2 = -5$;

c) $z^2 = 2$.

a) On sait que $i^2 = -1$ *donc :*

$z^2 = -1 \Leftrightarrow z^2 = i^2 \Leftrightarrow z^2 - i^2 = 0 \Leftrightarrow$ *(z-i)(z+i) = 0* $\Leftrightarrow$ *z-i = 0 ou z+i = 0*

$\Leftrightarrow$ *z = i ou z = -i. Donc l'ensemble des solutions est : { i ; -i } .*

b) $z^2 = -5 \Leftrightarrow z^2 = (\sqrt{5}i)^2 \Leftrightarrow z = \sqrt{5}i$ *ou z =* $-\sqrt{5}i$.

Donc l'ensemble des solutions est : $\{\sqrt{5}i ; -\sqrt{5}i\}$.

c) $z^2 = 2$. *L'ensemble des solutions est :* $\{\sqrt{2} ; -\sqrt{2}\}$

Définition

On appelle racine carrée d'un nombre complexe z_0 , toute solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = z_0$

Exemple 1

Les racines carrées de -5 sont $\sqrt{5}i$ *et* $-\sqrt{5}i$.

Exemple 2

Démontrer que 1+i est une racine carrée de 2i.

On a : $(1+i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$. *Donc 1+i est une racine carrée de 2i.*

Propriété

Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées opposées.

Exercice

Vérifier que $2 + 2i$ est une racine carrée de $8i$. Quelle est l'autre racine carrée de $8i$?

POINT METHODE Détermination sous forme algébrique des racines carrées de Z_0

On pose : z = x + iy avec x et y des nombres réels. $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ et $|z|^2 = x^2 + y^2$

$$z^2 = Z_0 \Leftrightarrow \begin{cases} Re(z^2) = Re(Z_0) \\ Im(z^2) = Im(Z_0) \\ |z|^2 = |Z_0| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = Re(Z_0) \\ 2xy = Im(Z_0) \\ x^2 + y^2 = |Z_0| \end{cases}$$

Exemple 1

Déterminer les racines carrées de $-20 - 48i$.

Solution

Soit z une racine carrée de $-20 - 48i$.

Posons z = x + iy avec x et y réels.

$|-20 - 48i| = 52$ *, on a :* $\begin{cases} x^2 - y^2 = -20 & (1) \\ 2xy = -48 & (2) \\ x^2 + y^2 = 52 & (3) \end{cases}$

(1)+(3) $\Rightarrow 2x^2 = 32$

$\Rightarrow x^2 = 16$

$x^2 = 16 \Leftrightarrow$ *x = -4 ou x = 4.*

Si x = -4 alors (2) donne : y = 6. Par suite : z = -4 + 6i .

Si x = 4 alors (2) donne : y = - 6. Par suite : z = 4 -6i.
Donc les racines carrées de $-20-48\text{i}$ *sont -4 + 6i et 4 – 6i.*

Exemple 2

Calculer sous forme algébrique le nombres complexe $(1-i)^2$.
En déduire les racines carrées de $-18i$.

Solution
On a : $(1-i)^2 = -2i$.
$-18i = 9(-2i) = 9(1-i)^2 = [3(1-i)]^2$.
D'où les racines carrées de $18i$ *sont* $3-3i$ *et* $-3+3i$.

Exercice
Déterminer les racines carrées de chacun des nombres complexes suivants :
-21-20i ; i ; 6+24i ; 7-24i ; 16i.

2. Equations: $z \in \mathbb{C}, az^2 + bz + c = 0$; $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$

Propriété

L'équation : $z \in \mathbb{C}, az^2 + bz + c = 0$, a, b, c des nombres complexes avec $a \neq 0$
admet des solutions dans $\mathbb{C}$.
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation.
■ Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une seule solution : $z = -\frac{b}{2a}$.
■ Si $\Delta \neq 0$ alors l'équation admet deux solutions :
$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$ où δ est une racine carrée de Δ.

Exemple 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $2z^2 + 2z + 5 = 0$.

Solution
Δ *= 4- 40 = -36 =* $(6i)^2$ *; une racine carrée de* Δ *est 6i.*
Les solutions de l'équation sont : $z_1 = \frac{-2-6i}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$; $z_2 = \frac{-2+6i}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$.
Donc l'ensemble des solutions de l'équation est : $S = \{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i; -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\}$.

Exemple 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (1+3i)z - 6 + 9i = 0$.

Solution
$\Delta = (1+3i)^2 - 4(-6+9i) = 16-30i$ *; déterminons une racine carrée* δ *de* Δ.
Posons $\delta = x + iy$ *avec x et y des nombres réels.*
$|16-30i| = 3$.

On a : $\begin{cases} x^2 - y^2 = 16 & (1) \\ 2xy = -30 & (2) \\ x^2 + y^2 = 34 & (3) \end{cases}$

(1)+(3) $\Rightarrow x^2 = 25$.

Soit x = -5 ou x = 5 . Si x = 5 alors (2) donne y = -3 donc $\delta = 5 - 3i$.

Les solutions de l'équation sont : $z_1 = \frac{1+3i-5+3i}{2} = -2 + 3i$; $z_2 = \frac{1+3i+5-3i}{2} = 3$.

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est : S = $\{-2 + 3i; 3\}$.

Exemple 3

Soit l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}$, $z^3 - (11 + 2i)z^2 + 2(17 + 7i)z - 42 = 0$.
Sachant que (E) admet une solution réelle, la résoudre.

Posons $\forall z \in \mathbb{C}$, *P(z) =* $z^3 - (11 + 2i)z^2 + 2(17 + 7i)z - 42$.
Posons z = x, avec x un nombre réel.
x est solution de (E) $\Leftrightarrow$ *P(x) = 0*

$\Leftrightarrow x^3 - (11 + 2i)x^2 + 2(17 + 7i)x - 42 = 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 11x^2 - 2ix^2 + 34x + 14ix - 42 = 0$

$\Leftrightarrow (x^3 - 11x^2 + 34x - 42) + i(-2x^2 + 14x) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 11x^2 + 34x - 42 = 0 & (1) \\ -2x^2 + 14x = 0 & (2) \end{cases}$

$-2x^2 + 14x = 0 \Leftrightarrow$ *x = 0 ou x = 7.*
0 n'est pas solution de (1). On a : $(7)^3 - 11(7)^2 + 34(7) - 42$ *= 343-539+238-42=0.*
Donc 7 est solution du système. Donc 7 est solution de (E).
P(z) se factorise par z-7 : P(z) = (z-7)$(az^2 + bz + c)$.
Développons (z-7)$(az^2 + bz + c)$ *:*
(z-7)$(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz - 7az^2 - 7bz - 7c$.
P(z) $= az^3 + (b - 7a)z^2 + (c - 7b)z - 7c = z^3 - (11 + 2i)z^2 + 2(17 + 7i)z - 42$

Par identification : $\begin{cases} a = 1 \\ b - 7a = -11 - 2i \\ c - 7b = 34 + 14i \\ -7c = -42 \end{cases}$ *, on trouve : a = 1 ; b = -4-2i ; c = 6*

Donc : P(z) = (z-7)[$z^2 + (-4 - 2i)z + 6$].
P(z) = 0 $\Leftrightarrow$ *z = 7 ou* $z^2 + (-4 - 2i)z + 6 = 0$.
Soit (E') : $z^2 + (-4 - 2i)z + 6 = 0$.
Le discriminant de (E') est : $\Delta' = (-4 - 2i)^2 - 24$ *= -12+16i.*
Trouvons une racine carrée de Δ. *Posons* $\delta = x + iy$ *avec x et y réels.*
$|-12 + 16i|$ *= 20.*

On a : $\begin{cases} x^2 - y^2 = -12 & (1) \\ 2xy = 16 & (2) \\ x^2 + y^2 = 20 & (3) \end{cases}$

(1)+(3) $\Rightarrow x^2 = 4$
soit x = -2 ou x = 2 .
Si x = 2 alors (2) donne y = 4 donc $\delta = 2 + 4i$.

Les solutions de l'équation (E') sont : $z_1 = \frac{4+2i-2-4i}{2} = 1-i$; $z_2 = \frac{4+2i+2+4i}{2} = 3+3i$.
Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) est : S = {7 ; 1-i; $3+3i$}.

Exercice 1
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : -(4+2i) $z^2 + (7-i)z + 1 + 3i = 0$.

Exercice 2
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 + (1 - 6i)z^2 + (-7 + i)z + 20 - 4i = 0$ sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure.

Exercice 3
On considère l'équation (E) suivante :
$z \in \mathbb{C}$, $z^3 + (-4 + i)z^2 + 3z + 8 - i = 0$.
1. Sachant que (E) admet une solution réelle, la calculer.
2. Résoudre (E) .

VI. RACINES N-IÈMES D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

1. Théorème et définition

Soit Z_0 un nombre complexe non nul et n un nombre entier tel que $n \geq 2$.
■ L'équation $z \in \mathbb{C}$, $z^n = Z_0$,admet n solutions qui sont appelées les racines n-ièmes de Z_0 .
■ Si $r = |Z_0|$ et $\theta = \arg(Z_0) + 2k\pi$, alors les racines n-ièmes de Z_0 sont :
$z_k = \sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$ avec $k \in \{0 ; 1 ; \ldots ; n-1\}$.
■ Si $n \geq 3$ alors les points-images des racines n-ièmes de Z_0, sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrits dans le cercle ($\mathcal{C}$) de centre O(0;0) et de rayon $\sqrt[n]{r}$.

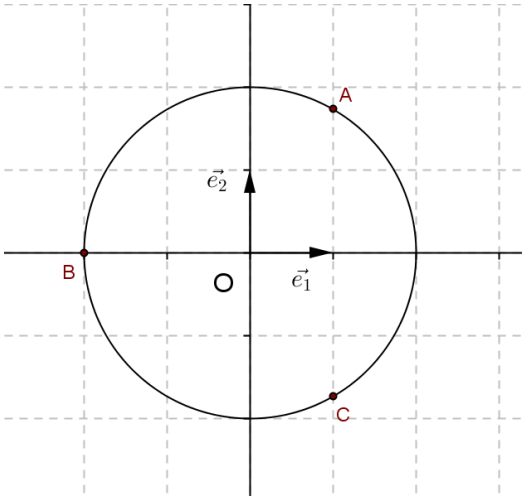
Exemple
Soit l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}$, $z^3 = -8$.
Résoudre (E) et représenter les points- images des solutions.

On a : |-8|=8 et Arg(-8) =π ;
Soit z une solution de (E).
Posons r = |z| et $\boldsymbol{\alpha}$ = arg(z) +2k$\boldsymbol{\pi}$. ($k \in \mathbb{Z}$)

$$z^3 = -8 \Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\alpha = \pi + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[3]{8} = 2 \\ \alpha = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \ , (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

(E) admet 3 solutions qui sont z_0, z_1, z_2 *:*
$z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3}$, $z_1 = 2e^{i(\pi)} = -2$, $z_2 = 2e^{i(-\frac{\pi}{3})} = 1 - i\sqrt{3}$.

S = { $1 + i\sqrt{3}$ *; -2 ;* $1 - i\sqrt{3}$ *}.*
Soit A, B et C les points d'affixes respectives z_0 , z_1, z_2 .
Les points A, B et C appartiennent au cercle (𝒞) de centre O(0 ;0) et de rayon 2 .
Le triangle ABC est équilatéral.



Exercice 1
Soit l'équation (E) : z ∈ℂ, $z^4 = -16i$.
Résoudre (E) et représenter les points- images des solutions.

Exercice 2
Soit l'équation (E) : z ∈ℂ, $z^3 + 1 = 0$.
Résoudre (E) et représenter les points- images des solutions.

CAS PARTICULIER

Les solutions de l'équation : z ∈ℂ, $z^n = 1$, sont : $z_k = e^{i(\frac{2k\pi}{n})}$ avec $0 \leq k \leq n-1$.
Elles sont appelées les racines n-ièmes de l'unité .

Exemple

Soit l'équation (E) : z ∈ℂ, $z^3 = 1$.
Résoudre (E) et représenter les points- images des solutions.

Les solutions de (E) sont les racines cubiques de l'unité.

Les solutions de (E) sont : $e^{i(\frac{2k\pi}{3})}$ *avec* $0 \leq k \leq 2$.

Donc l'ensemble des solutions de (E) : $\left\{1; e^{i(\frac{2\pi}{3})}; e^{i(\frac{4\pi}{3})}\right\} = \{1 ; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} ; -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\}$.

Exercice
Déterminer les racines 4-ièmes de l'unité.

2. Propriété

Si on connaît une solution u_0 de l'équation : (E) z ∈ℂ, $z^n = Z_0$, alors toutes les solutions de (E) s'obtiennent en multipliant u_0 par chacune des racines n-ièmes de l'unité.

Exemple

Soit l'équation (E) $z \in C$, $z^3 = 8$
Sachant que 2 est une solution de (E) déterminer toutes les solutions de (E).
Ecrire ces solutions sous forme algébriques.

Les racines cubiques de l'unité sont $1; e^{i(\frac{2\pi}{3})}: e^{i(-\frac{2\pi}{3})}$ *. Et comme 2 est solution de (E) alors les solutions de (E) sont :* $2 ; 2e^{i(\frac{2\pi}{3})}$ *et* $2e^{i(-\frac{2\pi}{3})}$.
Les solutions de (E) sont : 2 ; $-1+ i\sqrt{3}$ *;* $-1- i\sqrt{3}$.

Exercice
Soit l'équation (E) $z \in C$, $z^4 = -4$.
1. Justifier que 1+i est solution de (E).
2. En déduire toutes les solutions de (E).

VII. NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMETRIE

Le plan est muni du repère orthonormé direct (O ; $\vec{e_1}$; $\vec{e_2}$).

1. Interprétation géométrique de arg($z_B - z_A$)

Propriété

Soit A et B deux points distincts d'affixes respectives z_A et z_B :
■ mes($\widehat{\vec{e_1}; \overrightarrow{OA}}$) = arg($z_A$) + 2kπ, (k ∈ℤ)
■ mes($\widehat{\vec{e_1}; \overrightarrow{AB}}$) = arg($z_B$- z_A) + 2kπ, (k ∈ ℤ)

Exemple

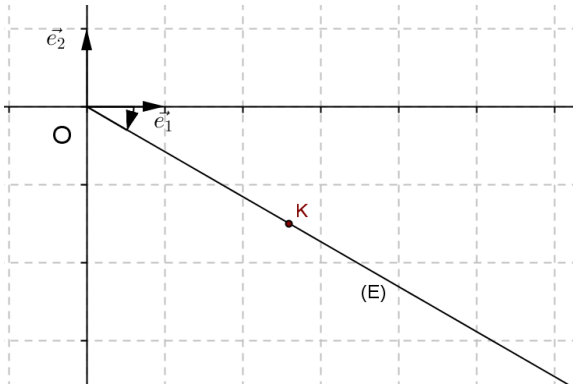
Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan d'affixe z tels que :
a)Arg(z) = $-\frac{\pi}{6}$.
b) Arg(z-2 + i) = $\frac{\pi}{4}$.

Solution

a) Soit M un point d'affixe z :

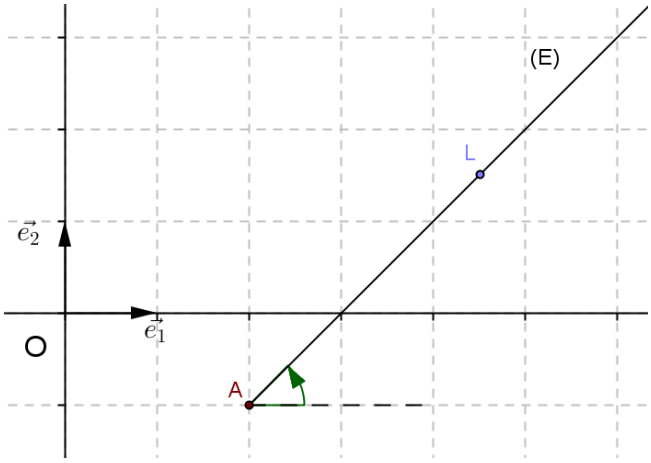
M ∈ (E) ⇔Arg(z) = $-\frac{\pi}{6}$ ⇔Mes$(\widehat{\vec{e_1}; \overrightarrow{OM}})$ = $-\frac{\pi}{6}$.

Soit K un point tel que Mes$(\widehat{\vec{e_1}; \overrightarrow{OK}})$ = $-\frac{\pi}{6}$. Ainsi : (E) est la demi-droite [OK] privée de O.



b) Soit M un point d'affixe z et A(2-i) : M ∈ (F) ⇔Arg(z -2 +i) = $\frac{\pi}{4}$ ⇔Mes$(\widehat{\vec{e_1}; \overrightarrow{AM}})$ = $\frac{\pi}{4}$.

Soit L un point tel que Mes$(\widehat{\vec{e_1}; \overrightarrow{AL}})$ = $\frac{\pi}{4}$. Ainsi : (F) est la demi-droite [AL) privée de A.



Exercice

Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan d'affixe z tels que :

a)Arg(z) = $\frac{\pi}{3}$; b) Arg(z + 2i) = 0 .

2. Interprétation géométrique de arg($\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$)

Propriété

Soient A, B, C, D 4 points du plan tels que A ≠ B et C ≠ D d'affixes respectives z_A , z_B , z_C , z_D :

arg($\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$) = mes$(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}})$ + 2kπ, (k ∈ℤ)

Exemple

Soient A, B, C les points du plan d'affixes respectives u = -4 + i2$\sqrt{3}$, v = 2 et t = -1 - i$\sqrt{3}$

1. Calculer $\frac{t-v}{u-v}$.

2. En déduire Mes$(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})$.

Solution

1. On a : $\frac{m-v}{u-v} = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$.

2. On a $Mes(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) = Arg\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B} = Arg\left(\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

On a $\left|\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right| = \frac{1}{2}$.

Soit $\theta = Arg(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$, *on a :* $cos\theta = \frac{1}{2}$ *et* $sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *donc* $\theta = \frac{\pi}{3}$. *Ainsi:*$Mes(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{3}$.

3. Caractérisations complexes de l'orthogonalité, du parallélisme, de l'alignement

Propriété

Soient A, B, C, D 4 points d'affixes respectives z_A , z_B , z_C , z_D tels que $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_D$:

■ (AB)⊥(CD) ⇔ $\frac{z_B-z_A}{z_D-z_C}$ est un nombre imaginaire pur non nul.

■ (AB)∥(CD) ⇔ $\frac{z_B-z_A}{z_D-z_C}$ est un nombre réel non nul.

■ A, B et C sont alignés ⇔ $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ est un nombre réel.

Exemple

Soient A, B, C les points d'affixes respectives -3i ; 1-i et 10 + 17i .

Démontrer que les points A, B et C sont alignés.

A, B et C sont alignés si $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ *est un nombre réel .*

On a : $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A} = \frac{10+17i+3i}{1-i+3i} = \frac{10+20i}{1+2i}$ *=10 . Comme* $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A} \in IR$ *alors A, B et C sont alignés.*

Exercice

Soient A, B, C les points d'affixes respectives 2+3i ; -i et 4+2i.

Démontrer que le triangle ABC est rectangle A.

4. Nombres complexes et triangles particuliers

Propriété

■ Le triangle ABC est rectangle en A $\Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ est un nombre imaginaire pur non nul.

■ Le triangle ABC est isocèle en A $\Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{i\alpha}$ ou $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{-i\alpha}$ avec $\alpha \in]0;\pi[$.

■ Le triangle ABC est rectangle et isocèle en A$\Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i$ ou $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = -i$.

■ Le triangle ABC est équilatéral $\Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Exemple

Soient A, B, C les points d'affixes respectives u = 1 , v = -1+2i et w = -1 - 2i .
Calculer $\frac{w-u}{v-u}$ et en déduire la nature du triangle ABC.

On a : $\frac{w-u}{v-u} = \frac{-1-2i-1}{-1+2i-1} = \frac{-2-2i}{-2+2i} = \frac{(-1-i)(-1-i)}{2} = i$ *ainsi,* $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$ *donc le triangle ABC est isocèle rectangle en* A .

Exercice

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O,I,J) (unité : 4 cm), on considère les points A, B, C d'affixes respectives $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$; -i. .
Placer les points A, B et C et démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

5. Caractérisation complexe d'un cercle

Propriété

Soient A, B, C, D 4 points distincts tels que trois d'entre eux ne soient pas alignés, d'affixes respectives z_A , z_B , z_C , z_D :

A, B, C et D sont cocycliques $\Leftrightarrow \left(\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} : \frac{z_D - z_B}{z_C - z_B}\right)$ est un nombre réel non nul .

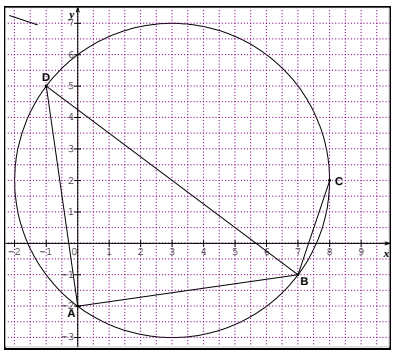
Exemple

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J). On considère les points A, B, C *et* D d'affixes respectives $-2i; 7 - i; 8 + 2i$ *et* $-1 + 5i$.

1. Placer les points A, B, C et D.
2. Calculer $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$, puis en déduire la nature du triangle ABD.
3. Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un cercle $(\mathcal{C})$ que l'on tracera. On notera Ω le centre de $(\mathcal{C})$; déterminer l'affixe de Ω et le rayon de $(\mathcal{C})$.

Solution

1. figure



2. $Q_1 = \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-1+7i}{7+i} = \frac{(-1+7i)(7-i)}{50} = i$ *donc le triangle ABD est rectangle et isocèle en A.*

3. On a : $Q_2 = \frac{z_D - z_C}{z_B - z_C} = \frac{-9+3i}{-1-3i} = \frac{(-9+3i)(-1+3i)}{10} = -3i$.

On a : $q = \frac{Q_1}{Q_2} = -\frac{1}{3}$ *; comme q est un nombre réel non nul alors les points* A, B, C *et* D *appartiennent à un cercle* $(\mathcal{C})$.

Le triangle ABD est rectangle en A donc le centre Ω de $(\mathcal{C})$ *est le milieu de [BD].*

D'où : $z_\Omega = \frac{z_B + z_D}{2} = 3 + 2i$.

Le rayon de $(\mathcal{C})$ *est* $\Omega B = |z_B - z_\Omega| = |7-i-3-2i| = |4-3i| = 5$.

TRAVAUX PRATIQUES

Exercice résolu 1

On considère l'application f qui, à tout nombre complexe z différent de $4i$, associe le nombre complexe $f(z) = \frac{z+1+i}{z-4i}$.

1. On pose $z = x + iy$ avec x et y des nombres réels.
Ecrire f(z) sous forme algébrique.

2. Déterminer et construire l'ensemble (E_1) des points M d'affixe z tels que f(z) soit un nombre réel.

3. Déterminer et construire l'ensemble (E_2) des points M d'affixe z tels que f(z) soit un nombre imaginaire pur.

Solution

1. En posant $z = x + iy$ *avec* $(x\,;\,y) \neq (0\,;\,4)$, *on obtient :*

$f(z) = \frac{x+iy+1+i}{x+iy-4i} = \frac{(x+1)+(y+1)i}{x+i(y-4)} = \frac{[(x+1)+(y+1)i][x-i(y-4)]}{[x+i(y-4)][x-i(y-4)]} = \frac{x^2+x+y^2-3y-4}{x^2+(y-4)^2} + i\frac{5x-y+4}{x^2+(y-4)^2}$

2. $f(z) \in IR \Leftrightarrow \frac{5x-y+4}{x^2+(y-4)^2} = 0 \Leftrightarrow 5x - y + 4 = 0$ *et* $(x\,;\,y) \neq (0\,;\,4)$.

L'ensemble (E_1) *est la droite d'équation* $5x - y + 4 = 0$ *privée du point A(0;4).*

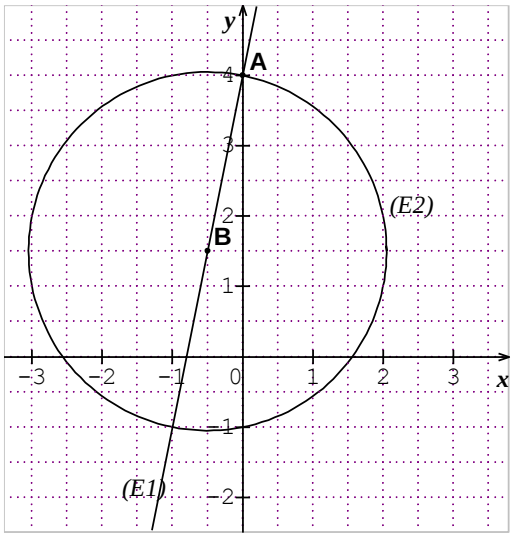
3. $f(z)$ *est un imaginaire pur* $\Leftrightarrow \frac{x^2+x+y^2-3y-4}{x^2+(y-4)^2} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + x + y^2 - 3y - 4 = 0$ *et* $(x\,;\,y) \neq (0\,;\,4)$

$\Leftrightarrow (x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{26}{4}$ *et* $(x\,;\,y) \neq (0\,;\,4)$.

(On a utilisé la forme canonique : $x^2 + \alpha x = (x + \frac{\alpha}{2})^2 - (\frac{\alpha}{2})^2$ *).*

L'ensemble (E_2) *est le cercle de centre* $B(-\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2})$ *et de rayon* $\frac{\sqrt{26}}{2}$ *privé du point A(0;4).*



Exercice résolu 2

Déterminer l'ensemble (C) des points M d'affixe z tels que $|z + 3i| = 5$

Solution

$|z + 3i| = 5 \Leftrightarrow |z - (-3i)| = 5$

$\Leftrightarrow AM = 5$

où $A\ est\ le\ point\ d'affixe\ 3i$.

D'où (C) est le cercle de centre A et de rayon 5

N.B La question peut être résolue en posant $z = x + iy$ avec $(x ; y) \in IR \times IR$. Dans ce cas l'ensemble (C) est caractérisé par une équation.

Exercice résolu 3

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 4 cm.

Déterminer l'ensemble (C) des points M d'affixe z tels que : $\left|\left(1 + i\sqrt{3}\right)z + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1.$

Solution

$$\left|\left(1 + i\sqrt{3}\right)z + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|1 + i\sqrt{3}\right| \left|z + \frac{\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + i\sqrt{3}}\right| = 1$$

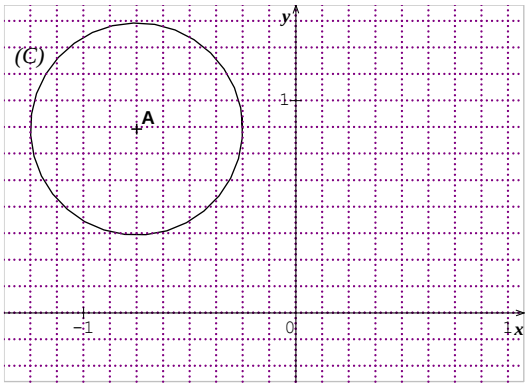
$$\Leftrightarrow 2\left|z + \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i\right| = 1$$

$$\Leftrightarrow \left|z - \left(-\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)\right| = 1$$

$$\Leftrightarrow AM = 1$$

où $A\ est\ le\ point\ d'affixe\ -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$.

D'où (C) est le cercle de centre A et de rayon 1.



Exercices résolu 3

Déterminer sous forme trigonométrique les racines 4-ièmes de -8 + 8i$\sqrt{3}$, puis les écrire sous forme algébrique.

Solution

On a : $|-8 + 8\sqrt{3}i|$ *= 16.*

Soit θ = Arg($-8+8\sqrt{3}i$*) :* $\begin{cases} cos\theta = \frac{-8}{16} = \frac{-1}{2} \\ sin\theta = \frac{8\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ *donc θ =* $\frac{2\pi}{3}$.

posons r = |z| et α= arg(z) +2kπ. $(k \in \mathbb{Z})$

$$z^4 = -8+8\sqrt{3}i \Leftrightarrow \begin{cases} r^4 = 16 \\ 4\alpha = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[4]{16} = 2 \\ \alpha = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Les racines 4-ièmes de -8 + 8i$\sqrt{3}$ *sont* z_0, z_1, z_2 , z_3 *tels que :*

$z_0 = 2\left(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i,$

$z_1 = 2\left(cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3}\right) = -1 + i\sqrt{3}$,

$z_2 = 2\left(cos\frac{-5\pi}{6} + isin\frac{-5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i$

$z_3 = 2\left(cos\frac{-\pi}{3} + isin\frac{-\pi}{3}\right) = 1 - i\sqrt{3}$.

Exercice résolu 4

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation$(E) : z^4 = -8+8\sqrt{3}i$.

1. On pose $a = \sqrt{3} + i$.

Calculer a^4 et $(ia)^4$.

2. En déduire les solutions de (E).

Solution

1.Ecrivons a sous forme trigonométrique : · On a : |a| = $\sqrt{1+3}$ *= 2 ;*

soit α = Arg(a), on a : $\begin{cases} cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$ *donc α =* $\frac{\pi}{6}$.

a = 2 ($cos(\frac{\pi}{6})$ *+* $isin(\frac{\pi}{6})$ *) donc*

a^4 *= 16(* $cos(\frac{2\pi}{3})$ *+* $isin(\frac{2\pi}{3})$ *) =* $16(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$ *= -8 + 8i*$\sqrt{3}$.

On a : $(ia)^4 = (i)^4(a)^4 = (a)^4$ *car* $(i)^4 = (i)^2 \times (i)^2 = 1$. *Donc* $(ia)^4$ *= -8 + 8i*$\sqrt{3}$.

2. D'après la question précédente, a et ia sont des solutions de (E).

On remarque d'autre part que si z_0 *est solution de (E) alors* $-z_0$ *est aussi solution de (E) du fait que :* $(-z)^4 = z^4$. *On en déduit que les deux autres solutions de (E) sont : -ia et -a.*

Finalement, l'ensemble des solutions de (E) est : S = {a ; ia ; -a ; -ia}.

Exercice résolu 5

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :

$z^3 - (6 + i\sqrt{3})z^2 + (11 + 4i\sqrt{3})z - 6 - 3i\sqrt{3} = 0.$

1.a) Démontrer que 1 et 3 sont des solutions de l'équation (E).

b) Résoudre (E).

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).

a) Placer les points A, B, C, E et G d'affixes respectives 3 ; $2+i\sqrt{3}$; -1 ; 7 et $11+4i\sqrt{3}$.

b) Démontrer que les points B, C et G sont alignés.

c) Démontrer que le triangle IAB est équilatéral.

Solution

1.a) Posons pour tout z de ℂ, P(z) = $z^3 - \left(6 + i\sqrt{3}\right)z^2 + \left(11 + 4i\sqrt{3}\right)z - 6 - 3i\sqrt{3}$

On a : P(1) = $1 - 6 - i\sqrt{3} + 11 + 4i\sqrt{3} - 6 - 3i\sqrt{3} = 12 - 12 - 4i\sqrt{3} + 4i\sqrt{3} = 0.$

On a : P(3) = $27 - 54 - 9i\sqrt{3} + 33 + 12i\sqrt{3} - 6 - 3i\sqrt{3} = 60 - 60 - 12i\sqrt{3} + 12i\sqrt{3} = 0.$

D'où 1 et 3 sont des solutions de (E).

b) Factorisons P(z) par (z-1)(z-3) = $z^2 - 4z + 3.$

Déterminons les nombres complexes a et b tels que : P(z) = $(z^2 - 4z + 3)(az + b).$

$(z^2 - 4z + 3)(az + b) = az^3 + (b - 4a)z^2 + (3a - 4b)z + 3b = z^3 - \left(6 + i\sqrt{3}\right)z^2 + \left(11 + 4i\sqrt{3}\right)z - 6 - 3i\sqrt{3}.$

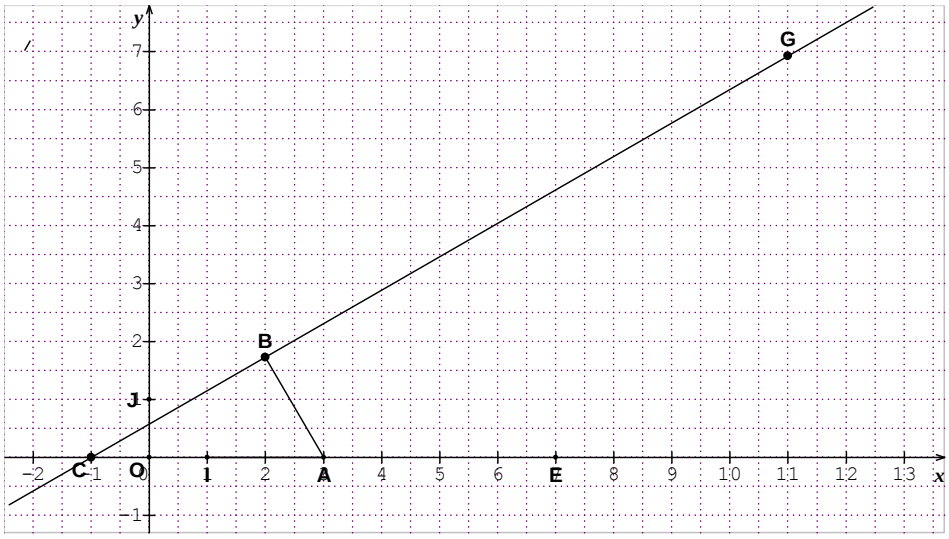
Par identification On obtient :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 4a = -6 - i\sqrt{3} \\ 3a - 4b = 11 + 4i\sqrt{3} \\ 3b = -6 - 3i\sqrt{3} \end{cases}$$ *, on trouve : a = 1 ;* $b = -2 - i\sqrt{3}$

Donc : P(z) = (z-1)(z-3)(z-2- $i\sqrt{3}$*) . D'où : P(z) = 0* $\Leftrightarrow$ *z = 1 ou z = 3 ou z =* $2 + i\sqrt{3}$.

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) est : S = {1 ; 3 ; $2 + i\sqrt{3}$ *}.*

2.a)



b) On a : $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_G} = \frac{3 + i\sqrt{3}}{-9 - 3i\sqrt{3}} = \frac{(3 + i\sqrt{3})(-9 + 3i\sqrt{3})}{108} = -\frac{1}{3}$;

$\frac{z_B - z_C}{z_B - z_G}$ *est un nombre réel . Il en découle que les points B, C et G sont alignés.*

c) on a : IA = |3-1| = 2 ; IB = $|2 + i\sqrt{3} - 1| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1 + 3} = 2$;

AB = $|2 + i\sqrt{3} - 3| = |-1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1 + 3} = 2$*. Ainsi, IA = IB = AB donc le triangle IAB est équilatéral.*

EXERCICES

Dans chacun des exercices ci-dessous, le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O , I , J)

1 **1.a)** Représenter les points R, S, T, U d'affixes respectives $3 + i$, $2 + 4i$, $-2 + i$, $-1 - 2i$.
b) Déterminer la nature du quadrilatère RSTU.
2. Soit I, J, K, L les points d'affixes respectives $2 - i$, $1 + 2i$, $-2 + 3i$, -1.
a) Placer les points I, J, K et L.
b) Démontrer que le quadrilatère IJKL est un losange.

2 1. Soit $j = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Calculer j^2.
2. Soit A, B, C les points-images respectifs des complexes 1, j et j^2
a) Placer les points A, B et C.
b) Quelle est la nature du triangle ABC ?
3. Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Placer G et déterminer l'affixe de G.

3 Soit les points D, P, E, I d'affixes respectives : $5 + i$, $4 + (1 - \sqrt{5})i$, $2 - 2\sqrt{2}$, $2 + i$.
1. Placer les points D, P et E.
2. Démontrer que les points D, P et E appartiennent à un même cercle de centre I.

4 Soit $A(4i)$ et $B(-4i)$ deux points du plan.
z est un nombre complexe différent de $4i$.
On note M le point du plan complexe d'affixe z.
On pose : $Z = \frac{z+4i}{z-4i}$
1. Déterminer et construire l'ensemble (E_1) des points M d'affixe z tels que Z soit un nombre réel.
2. Déterminer et construire l'ensemble (E_2) des points M d'affixe z tels que Z soit un nombre imaginaire pur.
3. Déterminer et construire l'ensemble (E_3) des points M d'affixe z tels que $|Z| = 1$.

5 Soit $z_1 = -2\sqrt{3} + 2i$ et $z_2 = 1 + i$.
Déterminer le module et l'argument principal de chacun des nombres complexes :
z_1, z_2, $\overline{z_1}$, $\frac{z_1}{z_2}$, ${z_1}^3$, $z_1 z_2$, $\frac{{z_1}^2}{z_2}$.

6 On pose $u = \sqrt{3} + i$.
a) Ecrire u sous forme trigonométrique.
b) Calculer u^7 et donner le résultat sous forme algébrique.

7 Soit u = 1 – i ; v = $1 - \sqrt{3}i$ et w = $\frac{u^5}{v^4}$.
1. Calculer le module et l'argument principal de u , v et w.
2. Ecrire u^5, v^4 et w sous forme algébrique.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

8 Ecrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :
$-2i$; 10; -7; $-1 + i$; $\frac{3-i}{2+i}$.

9 On pose : a = $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ +i($\sqrt{6} - \sqrt{2}$)
1.Calculer a^2.
2. En déduire le module et l'argument principal de a^2 puis en déduire le module et l'argument principal de a.
3. Déterminer les entiers naturels n tels que a^n soit un nombre imaginaire pur.

10 Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que :
a) (z + 1 – 2i)($\overline{z}$ + 1 + 2i) = 4
b) $|z - 2i| = 3$
c) $|z - 1| = |z + 1 - i|$
d) $\left|(\sqrt{3} - i)z + 1 + i\sqrt{3}\right| = 6$.

11 Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que :

a) $Arg\ z = \frac{\pi}{6}$;

b) $Arg\ \bar{z} = \frac{\pi}{3}$;

c) $Arg\ (z - 2 + i) = \frac{\pi}{2}$;

d) $Arg(iz + 2) = \frac{\pi}{4}$;

e) arg($z + 3 + 2i) = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

12 On considère les points A, B, C d'affixes respectives

$a = -4, b = -2\sqrt{3} - 2i, c = 2\sqrt{3} + 2i.$

1.a) Déterminer le module et l'argument principal des nombres complexes a, b et c.

b) Utiliser ces résultats pour placer les points A, B et C.

2.a) Calculer $\frac{c-a}{b-a}$.

b) En déduire la nature du triangle ABC.

13 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^3 = -1$; b) $z^4 + 16 = 0$;

c) $z^3 = 8i$; d) $z^2 = 2 - 2i\sqrt{3}$.

14 1. On pose : u = $32\sqrt{2}(1 + i)$.

a) Déterminer le module et l'argument principal de u.

b) Déterminer sous forme trigonométrique les racines cubiques de u.

2. On pose : a = $\cos\frac{3\pi}{4} + isin\frac{3\pi}{4}$.

Démontrer que les racines cubiques de u peuvent s'écrire respectivement sous la forme : 4a, $4a\left(\cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3}\right)$, $4a\left(\cos\frac{-2\pi}{3} + isin\frac{-2\pi}{3}\right)$.

3. Déduire des questions précédentes que :

$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

15 **1.**Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 - 1 = 0$.

2. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$.

3. L'unité graphique est 5 cm.

a) Placer les points A, B et C d'affixes respectives : $a = -2, b = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$ et $c = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$.

b) Démontrer que les points O, A, B et C sont cocycliques.

16 Déterminer les racines carrées des nombres complexes: $-7 - 24i;\ 2i$; $\sqrt{3} + i$; -25 ;-i ; 3+4i ;

17 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2 - (1 + i)z - i = 0$;

b) $z^2 + (1 + 4i)z - 5 - i = 0$;

c) $(1 + i)z^2 - (7 + i)z + 12 + 8i = 0.$

18 Pour tout nombre complexe z, on pose :

P(z) = $z^3 - (6 + 9i)z^2 + (45i - 9)z + 54 - 54i$

1. Calculer $P(3)$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.

19 Pour tout nombre complexe z, on pose**:**

$P(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + \sqrt{3}i)z - 8i.$

1. Vérifier que P(z) = (z- 2i)($z^2 - 2\sqrt{3}z + 4$).

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : P(z) = 0.

20 Résoudre dans $\mathbb{C}$ chaque équation après avoir montré qu'elle admet une solution imaginaire pure.

*****a)$z^3 + (4 - 5i)z^2 + (8 - 20i)z - 40i = 0;$

b)$z^3 - 2(1 + 2i)z^2 + 7iz + 3(1 - 3i) = 0;$

c)$z^3 + 2(i - 1)z^2 - 3iz + 1 + i = 0.$

21 Résoudre dans $\mathbb{C}$ chaque équation après avoir montré qu'elle admet une solution réelle. a)$z^3 - 3z^2 + (3 - i)z - 2(1 - i) = 0;$

*****b)$z^3 - 2iz^2 + 4(1 + i)z + 16 + 16i = 0;$

c)iz^3 - (-9+6i)z^2 + (-45-9i)z + 54+54i = 0 .

22 On considère le polynôme complexe P défini par :

$P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63.$

1. Calculer $P(i\sqrt{3})$ et $P(-i\sqrt{3})$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

23 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

a) $z^6 + (2i - 1)z^3 - 1 - i = 0$;

b) $z^4 - 30z^2 + 289 = 0$;
c)$z^4 + (3 - 6i)z^2 + 2(16 - 63i) = 0.$

24 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$u^3 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
On donnera les solutions sous forme exponentielle.
2. Justifier que pour tout nombre réel α, on a :
$1 + e^{i\alpha} = 2\cos\frac{\alpha}{2}\, e^{i\frac{\alpha}{2}}$.
3. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :
$(z-1)^6 + (z-1)^3 + 1 = 0$.
a) Justifier que si le nombre complexe z est solution de (E) alors $\overline{z}$ est aussi solution de (E).
b) Résoudre (E).
(On pourra poser $v = (z-1)^3$).
c) Ecrire les solutions de (E) sous forme exponentielle.

25 1.a) Déterminer les racines carrées de $-28 - 96i$.
b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$4Z^2 - (6 + 4i)Z + 3 + 9i = 0.$
2. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $z + \frac{1}{z} = \frac{3}{2}i.$
b) Calculer $(1-3i)^2$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z + \frac{1}{z} = \frac{3-i}{2}$.
3. Soit P(z) le polynôme complexe :
$P(z) = 4z^4 - (6+4i)z^3 + (11+9i)z^2 - (6+4i)z + 4$.
a) Exprimer $\frac{P(z)}{z^2}$ en fonction de $Z = z + \frac{1}{z}$.
b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.

26 On considère l'équation (E):
$z \in \mathbb{C}$, $z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1 = 0$.
1. Justifier que 1+i est une solution de (E).
2.a) Démontrer que si z_0 est solution de (E) alors $\overline{z_0}$ est aussi solution de (E).
b) En déduire une autre solution de (E).
3. Démontrer que si z_0 est solution de (E) alors $\frac{1}{z_0}$ est aussi solution de (E).
4. Déduire des questions précédentes toutes les solutions de (E).

27 Linéariser $f(x)$ dans chacun des cas suivants :
a) $f(x) = \cos^3 x$
b) $f(x) = \sin^3 x \cos(2x)$
c) $f(x) = \sin^4 x$.

28 On considère la suite de nombres complexes définie par :
$z_0 = 0$, $z_1 = i$ et,
$\forall n \geq 0$, $z_n - z_{n-1} = i(z_{n-1} - z_{n-2})$.
1. Exprimer $z_n - z_{n-1}$ en fonction de n .
2. Démontrer que : $\forall n \geq 0$, $z_n = \frac{1-i}{2}(i^n - 1)$.

29 On considère la suite de points M_n d'affixes respectives z_n définies par :
$z_0 = 8$ et pour tout entier naturel n,
$z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{4} z_n$.
1. Démontrer que : $OM_{n+1} = \frac{1}{2}OM_n$ et que $Mes(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_{n+1}}) = \frac{\pi}{3}$.
2. a) Calculer $\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}$.
b) En déduire $Mes(\overrightarrow{M_{n+1}O}, \overrightarrow{M_{n+1}M_n})$.
c) En déduire que $M_{n+1}M_n = \sqrt{3}\, M_{n+1}O$.
3. a) Utiliser les résultats précédents pour placer les points M_1 , M_2 , M_3 , M_4, M_5
b) Déterminer les entiers naturels n pour lesquels z_n est un nombre réel.

30 a est un nombre réel quelconque.
On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E):
$z^3 - (ai + 2\sqrt{3})z^2 + (2ia\sqrt{3} + 4)z - 4ai = 0.$
1. Déterminer le nombre réel a pour que -2i soit une solution de (E).
2. Déterminer le polynôme complexe q de degré 2 tel que pour tout nombre complexe z :
$z^3 - (ai + 2\sqrt{3})z^2 + (2ia\sqrt{3} + 4)z - 4ai =$
$q(z)(z - \sqrt{3} - i)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) pour a = -2.

4. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J), d'unité 3 cm, on donne les points M, N, Q d'affixes respectives : $\sqrt{3} + i$; -2i ; $\sqrt{3} - i$.

a) Représenter les points M, N et Q.

b) T désigne le symétrique de M par rapport à (OJ).

Démontrer que le triangle TMQ est rectangle en M.

c) Démontrer que les points M, Q, N et T sont cocycliques.

31 On considère dans ℂ l'équation (E):

$z^3 - (7 + 6i)z^2 + (10 + 26i)z + 6 - 24i = 0$.

1.a) Sachant que (E) admet une solution réelle, la calculer.

b) Résoudre (E) .

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J), d'unité 2 cm, on donne les points A, B et C d'affixes respectives : $1 + i$; 3 ; $3 + 5i$.

a) Placer A, B et C et démontrer que le triangle ABC est rectangle.

b) Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère ABDC soit un rectangle.

c) Déterminer l'affixe Ω du centre du rectangle ABDC.

32 On considère dans ℂ l'équation (E):

$z^4 + (i - \sqrt{3})z^3 - iz + 1 + i\sqrt{3} = 0$.

1.a) Développer, réduire et ordonner le polynôme $(z - \sqrt{3} + i)(z^3 - i)$.

b) Résoudre (E) .

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) (unité 4 cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$; $-i$.

a) Placer A, B et C.

b) Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

33 Unité graphique 2 cm.

Pour tout nombre complexe z, on pose :

$P(z) = z^3 - 3iz^2 + (3 + i)z - 2 + 2i$.

1. a) Calculer P(-1).

b) Résoudre dans ℂ, l'équation : P(z) = 0.

2. Soit f l'application qui, à tout point M d'affixe z ($z \neq -1$) associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{-iz-2}{z+1}$.

A, B, C et E sont les points d'affixes respectives : a = -1 ; b = 2i ; c = -i et e = 1 + i.

a) Placer les points A, B, C et E. Quelle est la nature du quadrilatère ABEC ? Justifier.

b) Soit C' = f(C).

Donner l'affixe de C' sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

c) Soit G' le point d'affixe $\frac{1}{2}$.

Calculer l'affixe du point G tel que f(G) = G'.

3. a) Démontrer que pour tout nombre complexe z différent de -1, on a : $|z' + i| \times |z + 1| = \sqrt{5}$.

b) Si le point M appartient au cercle (Γ) de centre A et de rayon 2, démontrer que M' appartient à un cercle (Γ′) dont on précisera le centre et le rayon.

4. a) Justifier que pour tout point M du plan distinct de A, on a : $OM' = \frac{BM}{AM}$.

b) En déduire l'ensemble (D) des points M du plan dont l'image M' soit sur le cercle de centre O et de rayon 1.

5. Représenter (Γ), (Γ') et (D).

.

10

NOMBRES COMPLEXES ET TRANSFORMATIONS DU PLAN

COURS 186

TRAVAUX PRATIQUES 192

EXERCICES 194

COMMENTAIRES

● **Ce chapitre** vise à définir l'écriture complexe des transformations du plan, permettant ainsi de caractériser analytiquement ces transformations.

● **En classe** de première, les similitudes n'ont pas été étudiées.

Les similitudes directes doivent êtres définies à l'aide de leurs transformations complexes.

Les similitudes indirectes ne sont pas au programme.

Il ne s'agit pas de faire une théorie sur les transformations et leurs écritures complexe, mais d'utiliser ces écritures.

A cet effet, il serait bon de faire retrouver par les élèves les écritures complexes des transformations.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES
Ecriture complexe des transformations : - translations ; - symétries centrales - symétries orthogonales par rapport aux axes du repère ; - homothéties de centre Ω et de rapport λ; - rotation de centre Ω et d'angle θ ; - similitude directe de centre Ω de rapport λ ($\lambda > 0$) et d'angle θ	☞Déterminer l'écriture complexe associée à une transformation donnée. ☞Déterminer les éléments caractéristiques d'une transformation dont on connait l'écriture complexe. ☞Utiliser l'écriture complexe d'une transformation pour : - démontrer une propriété ; -construire une figure ; - rechercher un ensemble de points.

COURS

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O , I , J).

I. ÉCRITURE COMPLEXE

1. Définitions

Définition 1

On appelle transformation du plan une bijection du plan dans lui-même .

Exemples : Les symétries centrales, les symétries orthogonales, les rotations, les translations , les homothéties sont des transformations du plan .

Définition 2

Soit f une transformation du plan, M un point du plan d'affixe z et M' d'affixe z' l'image de M par f . L'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à z associe z' est appelée écriture complexe de f .

Remarque :
Donner l'écriture complexe d'une transformation du plan qui a tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe z', c'est exprimer z' en fonction de z.

2. Ecritures complexes de quelques transformations du plan

Considérons les points M(z) et M'(z') tel que M' soit l'image de M par la transformation f du plan.

Transformations f du plan	**Ecriture complexe de f**
Symétrie orthogonale d'axe (OI)	$z' = \bar{z}$
Symétrie orthogonale d'axe (OJ)	$z' = -\bar{z}$
Symétrie centrale de centre $\Omega(\omega)$	$z' - \omega = -(z - \omega)$
Translation de vecteur $\overrightarrow{u}(b)$	$z' = z + b$
Homothétie de centre Ω (ω) et de rapport k ($k \in$ IR*)	$z' - \omega = k(z - \omega)$
Rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ	$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

Exemples

1. Donner l'écriture complexe de la translation t de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $1+i$.
2. Déterminer l'écriture complexe de la symétrie centrale de centre A(1-3i) .
3. Déterminer l'écriture complexe de l'homothétie h de centre $\Omega(1-2i)$ et de rapport 2.
4. Déterminer l'écriture complexe de la rotation r de centre A(– i) et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Solutions

1. L'écriture complexe de la translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $1+i$ *est* $z' = z + 1 + i$.

2. L'écriture complexe de S_A est de la forme $z' - (1-3i) = -(z - 1 + 3i)$.

Donc l'écriture complexe de S_A est : $z' = -z + 2 - 6i$.

3. *L'écriture complexe de h est : z' –(1-2i) = 2(z -1+2i).*

Donc l'écriture complexe de h est $z' = 2z - 1 + 2i$.

4. L'écriture complexe de r est : $z' + i = e^{i\frac{\pi}{3}}(z+i)$.

Donc l'écriture complexe de r est : $z' = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

II. SIMILITUDES DIRECTES

1. Définition

Une similitude directe S du plan est une transformation du plan dont l'écriture complexe est de la forme :

$$z' = az + b \ , \quad a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b \in \mathbb{C}.$$

Le nombre réel strictement positif $|a|$ est appelé le rapport de S.

Exemples

- Les translations, les rotations sont des similitudes directes de rapport 1.
- Une homothétie de rapport λ est une similitude directe de rapport $|\lambda|$.

Propriétés

Soit S une similitude directe d'écriture complexe $z' = az + b$, $a \in \mathbb{C}^*$ *et* $b \in \mathbb{C}$.

■ Si $a = 1$ alors S est la translation de vecteur d'affixe b.

■ Si $a \neq 1$ alors la similitude directe S est caractérisée par :

− son centre Ω $(\frac{b}{1-a})$, l'unique point invariant ;

− son rapport k = $|a|$;

− son angle θ = Arg(a).

On note $S_{(\Omega\,;k\,;\,\theta)}$ la similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ .

Exemple

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation F du plan dont l'écriture complexe est : $z' = (1 - i\sqrt{3})z + 2$.

Solution

L'écriture complexe de F est de la forme : $z' = az + b$ *avec*

$a = 1 - i\sqrt{3}$ *et* $b = 2$ *;* $a \in \mathbb{C}^*$ *et* $b \in \mathbb{C}$. *Donc F est une similitude directe.*

$a \neq 1$, *donc F est caractérisée par son centre* $\Omega(\omega)$, *son rapport k et son angle* θ .

Centre $\Omega(\omega)$ *:*

$\omega = \frac{2}{1-(1-i\sqrt{3})} = \frac{2}{i\sqrt{3}} = \frac{-2i\sqrt{3}}{3}$

rapport k :

$k = |a| = |1 - i\sqrt{3}| = 2$

Angle θ *: On a* θ *=Arg (1 –* $i\sqrt{3}$ *) ,*

donc : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

donc : $\theta = -\frac{\pi}{3}$.

Conclusion: F est la similitude directe de centre $\Omega\left(\frac{-2i\sqrt{3}}{3}\right)$, *de rapport 2 et d'angle* $-\frac{\pi}{3}$.

Propriété

L'écriture complexe de la similitude directe *S* de centre $\Omega(\omega)$, de rapport $k(k \neq 1)$ et d'angle θ est de la forme : $z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)$

Exemple

Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe S de centre $A(2 + 3i)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Solution

L'écriture complexe de S est de la forme $z' = az + b$

$|a| = \sqrt{2}$ *et Arg (a) =* $\frac{\pi}{4}$ *donc* $a = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i$.

L'écriture complexe de S est de la forme $z' = (1 + i)z + b$, $b \in \mathbb{C}$

Déterminons b .

S(A) = A $\Leftrightarrow 2 + 3i = (1 + i)(2 + 3i) + b$

$\Leftrightarrow 2 + 3i = -1 + 5i + b$

$\Leftrightarrow b = 3 - 2i$.

On peut aussi déterminer b par la relation $\frac{b}{1-a} = Z_A$

Donc l'écriture complexe de S est : $z' = (1 + i)z + 3 - 2i$.

3. Détermination d'une similitude directe

Propriété 1

Soit A, B,C et D quatre points du plan tels que A ≠ B et C ≠ D.
Il existe une unique similitude directe du plan transformant A en C et B en D.

Exemple 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O,I,J), on donne les points A, B ,C et D d'affixes respectives : $-2-i$; $2i$; $2-2i$ et $1+3i$.

1. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe S du plan qui transforme A en C et B en D.
2. Déterminer les éléments caractéristiques de S.

Solution

1. L'écriture complexe de S est de la forme $z' = az + b$; $a \in \mathbb{C}^*$ ***et*** $b \in \mathbb{C}$.

S(A) = C $\Leftrightarrow\ 2-2i = (-2-i)a + b$

S(B) = D $\Leftrightarrow 1+3i = 2ia + b$

On obtient le système suivant : $\begin{cases} (-2-i)a + b = 2-2i \\ 2ia + b = 1+3i \end{cases}$

La résolution de ce système donne : $a = 1+i$ *et* $b = 3+i$.

Donc l'écriture complexe de S est : $z' = (1+i)z + 3 + i$.

2. Eléments caractéristiques de S :

Notons Ω *le centre de S, k son rapport et* θ *son angle.*

$z_\Omega = \frac{3+i}{1-(1+i)} = \frac{3+i}{-i} = -1+3i.$

$k = |1+i| = \sqrt{2}$ *On a :* $\begin{cases} cos\ \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\ \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ *donc :* $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Propriété 2

Soit Ω, A et A' trois points du plan tels que A ≠ Ω et A' ≠ Ω.
Il existe une unique similitude directe du plan de centre Ω qui transforme A en A'.

Exemple

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O,I,J), on donne les points A, B et C d'affixes respectives : $2+2i$; -4 + $2i$; $2-i$.

Soit la similitude directe S du plan de centre A qui transforme B en C.

Déterminer les éléments caractéristiques de S.

L'écriture complexe de S est de la forme $z' = az + b$; $a \in \mathbb{C}^*$ *et* $b \in \mathbb{C}$.

S(A) = A $\Leftrightarrow\ 2+2i = (2+2i)a + b$

S(B) = C $\Leftrightarrow 2-i = (-4+2i)a + b$

On obtient le système suivant : $\begin{cases} (2+2i)a + b = 2+2i \\ (-4+2i)a + b = 2-i \end{cases}$

La résolution de ce système donne : $a = \frac{1}{2}i$ *et* $b = 3+i$.

Donc l'écriture complexe de S est : $z' = \frac{1}{2}iz + 3 + i$.

2. Eléments caractéristiques de S :

Le centre de S est A.

Soit k le rapport de S et θ *son angle.*

$k = \left|\frac{1}{2}i\right| = \frac{1}{2}$.

On a : $\begin{cases} cos\,\theta = 0 \\ sin\,\theta = 1 \end{cases}$ *donc :* $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Propriété 3

Soit k un nombre réel strictement positif, θ un nombre réel, A et B deux points du plan.
Il existe une unique similitude directe du plan de rapport k et d'angle θ transformant A en B.

Exemple

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O,I,J), on donne les points A et B d'affixes respectives : $2i$ et $5+i$.

Soit la similitude directe S du plan de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$ qui transforme A en B.

Déterminer le centre Ω de S.

L'écriture complexe de S est de la forme $z' = az + b$; $a \in \mathbb{C}^*$ *et* $b \in \mathbb{C}$.

On a : $a = \sqrt{2}\left(cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 1 - i$. *Donc : z' = (1-i)z + b*

S(A) = B $\Leftrightarrow$ *(1-i)(2i)+ b = 5 + i.*

On trouve b = 3-i.

Par suite: z' = (1-i)z + 3-i.

On a donc : $z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{3-i}{1-1+i} = \frac{3-i}{i} = -1-3i$.

4. Similitude directe et configuration

Propriété

■ Toute similitude directe S du plan conserve l'alignement, le parallélisme, l'orthogonalité, le barycentre, le contact et les angles orientés.

■ Toute similitude directe du plan de rapport k :

♦Multiplie les longueurs par k et les aires par k^2 .

♦Transforme une droite en une droite, une demi-droite en une demi-droite, un segment en un segment, un cercle en un cercle.

Remarque

Si S est une similitude directe de rapport *k* alors S transforme :

− un cercle (C) de centre A et de rayon R en un cercle (C') de centre S(A) et de rayon *k*R.

− un cercle (C) de diamètre [AB] en un cercle (C') de diamètre [A'B'] où A' = S(A) et B' = S(B).

Exemple 1

On désigne par S la similitude directe d'écriture complexe : $z' = \frac{1-i}{2}z - 4 + i$.

1. Déterminer les éléments caractéristiques de S

2. Soit (C) le cercle de centre A(1+i) et de rayon 4 et (C') son image par S .

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (C') .

1. *Notons Ω le centre de S, k son rapport et θ son angle.*

$z_\Omega = \frac{-4+i}{1-(\frac{1-i}{2})} = -3 + 5i.$ $k = \left|\frac{1-i}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$ *On a :* $\begin{cases} cos\,\theta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\,\theta = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ *donc :* $\theta = -\frac{\pi}{4}.$

2. *(C) est le cercle de centre A(1+i) et de rayon 4.*

Donc (C') est le cercle de centre S(A) et de rayon $\frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$.

Notons A' l'image de A par S. On a : $z_{A'} = \frac{1-i}{2}z_A - 4 + i = \frac{1-i}{2}(1+i) - 4 + i = -3 + i.$

Ainsi : (C') est le cercle de centre A'(-3+i) et de rayon $2\sqrt{2}$.

Exemple 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O,I,J), on donne les points A, B ,C et D d'affixes respectives : $1 ; \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$.

1. Démontrer que les points D, A et C sont alignés.

2. Déterminer l'angle θ et le rapport k de la similitude directe s de centre O qui transforme A en C.

3. On note F et G les images par la similitude directe s des points D et C respectivement. Montrer que les points F, C et G sont alignés.

Solution

1. On a : $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = -1.$ *Comme* $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A}$ *est un réel non nul, les points A, D et C sont alignés.*

2. L'écriture complexe de s est de la forme $z' = az + b\ ;\ a \in \mathbb{C}^*\ et\ \ b \in \mathbb{C}$.

s(O) = O $\Leftrightarrow 0 = a \times 0 + b.$ *Donc b = 0.*

s(A) = C $\Leftrightarrow \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = a.$ *Donc l'écriture complexe de s est :* $z' = \left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$.

2. k le rapport de s et θ son angle.

$k = \left|\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{3}.$ *On a :* $\begin{cases} cos\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\,\theta = \frac{1}{2} \end{cases}$ *donc :* $\theta = \frac{\pi}{6}.$

3. On a : s(A) = C, s(D) = F et s(C)= G. Comme les points A, C et D sont alignés alors leurs images respectives C, G et F sont alignés car s conserve l'alignement.

TRAVAUX PRATIQUES

Exercice résolu

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :

$z^3 + (4-2i)z^2 + (8-6i)z + 8 - 4i = 0$.

1.a) Démontrer que (E) admet une solution réelle z_0, que l'on déterminera.

b) Résoudre (E).

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).

Soient les points A, B et C d'affixes respectives : -1+3i ; -2 et -1- i .

Soit r la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre Ω d'affixe i.

a) Placer A, B et C.

b) Démontrer que B est l'image de A par la rotation r.

c) Déterminer l'antécédent D du point C par la rotation r.

Placer D sur la figure.

3.a) Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b) Démontrer que le quadrilatère ADBC est un trapèze isocèle.

1. Posons $z = x$, avec x réel.

x est solution de (E) si et seulement si $x^3 + (4-2i)x^2 + (8-6i)x + 8 - 4i = 0$.

$$x^3 + (4-2i)x^2 + (8-6i)x + 8 - 4i = 0 \Leftrightarrow x^3 + 4x^2 - 2ix^2 + 8x - 6ix + 8 - 4i = 0.$$
$$\Leftrightarrow x^3 + 4x^2 + 8x + 8 + i(-2x^2 - 6x - 4) = 0.$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 4x^2 + 8x + 8 = 0 & (E_1) \\ -2x^2 - 6x - 4 = 0 & (E_2) \end{cases}$$

(E_2) admet deux solutions : -1 et -2.

On a : $(-1)^3 + 4(-1)^2 + 8(-1) + 8 = 3$.

On a : $(-2)^3 + 4(-2)^2 + 8(-2) + 8 = 0$.

Donc -2 est la solution réelle de (E) : $z_0 = -2$.

b) Posons : $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = z^3 + (4-2i)z^2 + (8-6i)z + 8 - 4i$.

P(z) se factorise par z + 2 :

P(z) = (z+2)$(z^2 + az + b)$.

Donc : $P(z) = z^3 + (a+2)z^2 + (b+2a)z + 2b$.

Une identification terme à terme donne

$$\begin{cases} a + 2 = 4 - 2i \\ b + 2a = 8 - 6i \\ 2b = 8 - 4i \end{cases}$$

D'où a = 2-2i et b = 4-2i.

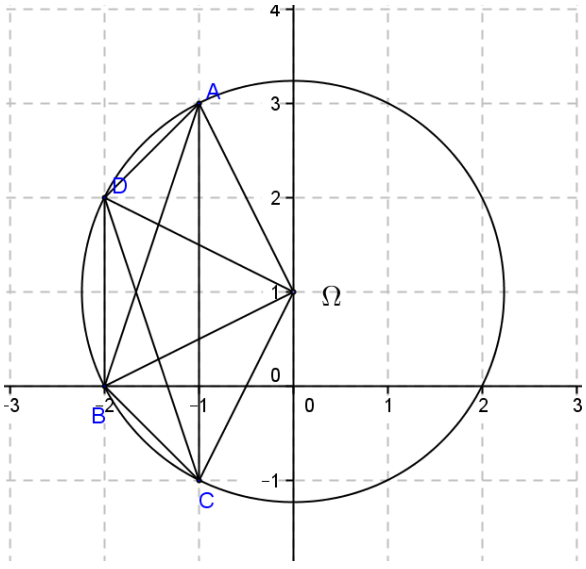
Donc : P(z) = (z+2)$(z^2 + (2-2i)z + 4 - 2i)$.

Ainsi : (E) $\Leftrightarrow$ *(z+2)*$(z^2 + (2-2i)z + 4 - 2i) = 0$

$\Leftrightarrow$ *z = -2 ou* $z^2 + (2-2i)z + 4 - 2i = 0$.

Résolvons l'équation (E') : $z \in \mathbb{C},\ z^2 + (2-2i)z + 4 - 2i = 0.$
On a : $\Delta = (2-2i)^2 - 4(4-2i) = 4 - 4 - 8i - 16 + 8i = -16 = (4i)^2$.
(E') admet deux solutions z_1 *et* z_2 *:*
$z_1 = \frac{-2+2i-4i}{2} = -1 - i \quad et\, z_2 = \frac{-2+2i+4i}{2} = -1 + 3i.$

Finalement, l'ensemble des solutions de (E) est $\{-2 : -1 - i : -1 + 3i\}$.
2.a) Voir graphique.
b) L'écriture complexe de r est de la forme : $z' = e^{i\frac{\pi}{2}}z + b.$
On a : $e^{i\frac{\pi}{2}} = cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2} = i.$
On a : $\frac{b}{1-e^{i\frac{\pi}{2}}} = z_\Omega \quad donc : b = \left(1 - e^{i\frac{\pi}{2}}\right) z_\Omega = (1-i)i = 1 + i.$
Donc l'écriture complexe de r est : $z' = iz + 1+i.$
On a : $iz_A + 1 + i = i(-1 + 3i) + 1 + i = -i - 3 + 1 + i = -2 = z_B$. *Donc r(A) = B.*
c) $r(D) = C \Leftrightarrow iz_D + 1 + i = -1 - i$
$\Leftrightarrow iz_D = -2 - 2i$
$\Leftrightarrow z_D = \frac{-2-2i}{i} = 2i - 2.$
3.a) On a: r(A) = B donc $\Omega A = \Omega B = |z_A - z_\Omega| = |-1 + 3i - i| = |-1 + 2i| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}.$
On a: r(D) = C donc $\Omega D = \Omega C = |z_D - z_\Omega| = |-2 + 2i - i| = |-2 + i| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}.$
On a donc : $\Omega A = \Omega B = \Omega D = \Omega C = \sqrt{5}$.
Par conséquent les points A, B, C et D appartiennent au cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{5}$.
b) Le quadrilatère ADBC est un trapèze isocèle si (AC)// (BD) et AD = BC.
On a : $z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = -1 - i + 1 - 3i = -4i.$
On a : $z_{\overrightarrow{DB}} = z_B - z_D = -2 + 2 - 2i = -2i.$
On a : $z_{\overrightarrow{AC}} = 2z_{\overrightarrow{DB}} \quad donc\ \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{DB}$. *Donc (AC)// (BD).*
Ainsi : ADBC est un trapèze.
On a : $AD = |-2 + 2i + 1 - 3i| = |-1 - i| = \sqrt{2} \quad et\ BC = |-1 - i + 2| = |1 - i| = \sqrt{2}.$
Donc AD = BC.
Comme ADBC est un trapèze et AD = BC alors ADBC est un trapèze isocèle.



EXERCICES

Dans tout ce qui suit, le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O,I,J)

1 Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation F dont l'écriture complexe est donnée.

a*) $z' = -z + 7 + 2i$;

b*)$z' = -3z + 1 + 5i$;

c*) $z' = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}z + 1$;

$d)z' = z + 3 - i$;

$e)\ z' = -z - 2 + 3i$;

$f)\ z' = 5z + 4 + i$;

$g)\ z' = -iz + 1$;

$h)\ z' = (1-i)z + 1 + 5i$;

$i)\ z' = iz + 5 - i$;

$j) *\ z' = \frac{1 + i\sqrt{3}}{4}z + 2i$;

$k)\ z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z$.

2 ABCD est un carré de sens direct et de centre Ω.

Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe de centre A qui transforme C en B.

3 Déterminer l'écriture complexe de chacune des transformations suivantes :

a) L'homothétie h de centre A$(1 + 2i)$ et de rapport 3.

b) La rotation r de centre B$(2i)$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

c) La similitude directe S de centre Ω $(1-i)$, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{5\pi}{6}$.

4 On donne les points A$(1 + i)$ et D$(1 + 2i)$

Soit S la similitude directe de centre J qui applique A sur D .

1. Démontrer que le rapport de S est $\sqrt{2}$ et que l'angle de S est $\frac{\pi}{4}$.
2. Déterminer l'image de la droite d'équation $y = -x + 1$ par S .
3. Déterminer l'image par S du cercle (C) de diamètre [AO] .

5 **BAC D SESSION 2000**

Les points A et B ont pour affixes respectives $\sqrt{3} + i$ et $-\sqrt{3} + i$.

On désigne par S la similitude directe d'écriture complexe : $z' = \frac{3-i\sqrt{3}}{2}z - \sqrt{3} + i$.

1. Déterminer les images des points O et A par S
2. Déterminer les éléments caractéristiques de S
3. Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 2 et (C') son image par S .

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (C') .

b) Construire (C') .

6 On note A le point d'affixe 2 et S la transformation du plan d'écriture complexe $z' = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

1. Déterminer l'image de A par S .
2. Déterminer l'antécédent P de O par S .
3. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S .
4. Soit M un point du plan distinct de A et M' l'image de M par S .

a) Démontrer que le triangle AMM' est rectangle en M'.

b) Soit E le point d'affixe 4 + 2i et E' l'image de E par S.

En utilisant la question précédente, donc une construction de géométrique de E'.

7 BAC D SESSION 1998

Soit le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) (unité : 4 cm).
On considère la transformation S du plan qui, à tout point M d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que :

z' = (1 + i$\sqrt{3}$)z + $\frac{3}{2}$ + i$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. a) Démontrer que S a un point invariant J d'affixe $-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S.

2. Soit le point A(-1 ; 0).

a) Tracer le cercle ($\mathscr{C}$) de diamètre [JA].

b) Caractériser puis tracer le cercle ($\mathscr{C}$ ') image par S du cercle ($\mathscr{C}$).

3. Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que :

$$\left|(1+\mathrm{i}\sqrt{3})z+\frac{3}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=1$$

(On pourra utiliser la question 2).

8 L'unité graphique est 2 cm.

1. Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M(z) tels que :
$|(1-i)z+2i|$= 2.

2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation F du plan qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :
z' = $(1-i)z+2i$.

3. Déterminer l'image du cercle (C) de centre $\Omega(2;-1)$ et de rayon 1.

9 BAC D SESSION 1995

1. Résoudre dans ℂ l'équation :
$z^3-i=0$.

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O,I,J). (Unité : 2 cm).

Soient les points : A$\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$, B $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$ et C$(0;-1)$.

On considère la similitude directe S de centre O, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Soit M un point d'affixe z et M' le point tel que : M' = S(M).

a) Déterminer l'affixe z' du point M' en fonction de z.

b) Déterminer les affixes des points A', B' et C' images respectives des points A, B et C par S. Placer ces points .

3. On note $\mathcal{A}$ l'aire du triangle ABC et $\mathcal{A}$' l'aire du triangle A'B'C'.

Exprimer $\mathcal{A}$' en fonction de $\mathcal{A}$.

4. Déterminer une homothétie h de centre O qui transforme globalement le triangle ABC en A'B'C'.

10 BAC D SESSION 1996

PARTIE A

On considère dans ℂ l'équation (E) :
$z^3-(3\mathrm{i}+2)z^2+(5\mathrm{i}-1)z-2\mathrm{i}+2=0$.

1.Sachant que (E) admet une solution réelle, la calculer .

b) Résoudre (E).

PARTIE B

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O,I,J).

Soit A_1 = I, $A_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $A_3\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$.

1. Démontrer qu'il existe une similitude directe S de centre O qui transforme A_1 en A_2 et A_2 en A_3 .

Donner les éléments caractéristiques de S.

2. On considère la suite de points (A_n) définie par : pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,
$A_{n+1}=S(A_n)$.

Placer les points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 et A_6 .

3. d(A,B) désigne la distance de A à B.

a) Démontrer que : pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,
$d(A_{n+1},A_{n+2})=\sqrt{2}d(A_n,A_{n+1})$.

b) On pose pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,
$L_n=d(A_1,A_2)+d(A_2,A_3)+\ldots+d(A_{n-1},A_n)$.
Calculer L_n en fonction de n.

11 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) (unité 4 cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives :
$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$; $-i$.
1.a) Placer A, B et C.
b) Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.
2. Soit K le milieu du segment [AC] et S la similitude directe de centre K qui transforme A en B.
a) Déterminer les éléments caractéristiques de S.
b) Démontrer que l'image du point O par S est le point C.

12 BAC D SESSION 2004

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 4i$; $z_B = 2\sqrt{3} + 2i$ et $z_C = -2\sqrt{3} + 2i$.
1. Déterminer le module et l'argument principal de chacun des nombres complexes z_A, z_B et z_C
2. Utiliser les résultats précédents pour placer les points A, B et C .
3. Démontrer que le triangle OBA est équilatéral.
4. Démontrer que le quadrilatère OBAC est un losange.
5. On désigne par K le milieu du segment $[OA]$ et par S la similitude directe de centre O qui transforme B en K.
a) Déterminer l'écriture complexe de S .
b) Calculer l'affixe de l'image par S du point L milieu du segment $[AC]$.
c) En déduire que l'image par S de la médiatrice du segment $[AC]$ est la droite (OI).

13 BAC D SESSION 1993

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :
$\frac{z^4}{8} - (1+i)z^3 + 6iz^2 + 8(1-i)z - 10 = 0.$
1.a) Démontrer que (E) admet une solution réelle z_1 et une solution imaginaire pure z_2 .
b) Résoudre (E). On désignera par z_1, z_2, z_3 et z_4 les solutions de cette équation avec : $R_e(z_3) < R_e(z_4)$.
2. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).
a) Placer les points A, B, C, et D d'affixes respectives : 2 ; 2i ; 2 + 4i et 4 + 2 i .
b) Démontrer que ABCD est un carré.
3. Soit la similitude directe S telle que :
S(A) = B et S(C) = D.
Déterminer les éléments caractéristiques de S.

14 ∗Soit A ; B et C les points d'affixes respectives 2, $2i$ et $2 + 4i$.
1. Placer les points A, B et C.
2. Démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en B.
3. On considère la similitude directe S du plan de centre A qui transforme C en B .
a) Déterminer le rapport et l'angle de S .
b) Déterminer l'écriture complexe de S .
c) Déterminer par S l'image D' du point D d'affixe $7-3i$.
d) Déterminer l'antécédent de O par S .
4. On considère la suite des points (A_n) définie de la façon suivante :
A_0 = C ; A_1 = S(C) et pour tout $n \in$ IN , A_{n+1} = S(A_n) .
a) Déterminer l'affixe de A_2 .
b) On note $d_n = A_nA_{n+1}$.
Montrer que (d_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme .
c) Exprimer d_n en fonction de n.
d) On pose $L_n = d_0 + d_1 + \ldots + d_{n-1}$.
Exprimer L_n en fonction de n , puis calculer la limite de L_n quand n tend vers $+\infty$.

15 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J).
Soit S la similitude directe de centre O, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.
Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par :
A_0 = I et $A_{n+1} = S(A_n)$.

1. Démontrer que : $\forall \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \frac{3+i\sqrt{3}}{4} z_n$.

2. On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n.

a) Démontrer que la suite (r_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) En déduire l'expression de r_n en fonction de n.

c) Déterminer la distance OA_n lorsque n tend vers $+\infty$?

3. Démontrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

4. On admet que, pour tout entier naturel n, $z_n = r_n e^{i\frac{n\pi}{6}}$.

Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.

5. Utiliser les résultats précédents pour représenter $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8$.

16 BAC D SESSION 2005

Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}, \vec{v}$) . L'unité graphique est le centimètre. On donne le point A d'affixe i.

Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que :

$\left|\left(1 - i\sqrt{3}\right)z - \sqrt{3} - i\right| = 6$.

1. a) Démontrer que : M ∈ (Γ) ⇔ $|z - i| = 3$.

b) En déduire la nature de (Γ).

2. On considère les points B et C d'affixes respectives $\sqrt{3}$ et -4i.

On considère la similitude directe S qui applique A sur O et B sur C.

Soit M d'affixe z et M' d'affixe z' l'image de M par S.

a) Démontrer que : $z' = \left(1 - i\sqrt{3}\right)z - \sqrt{3} - i$.

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S. On notera Ω son centre.

3. On désigne par (C) l'image de (Γ) par S.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (C).

b) Construire (C) et (Γ).

4. Soit D le point tel que :

D ∈ [ΩB) et ΩD = 2ΩB.

a) Construire les points D et Ω dans le même repère.

b) Démontrer que le triangle ΩCD est équilatéral.

5. Soit r la rotation de centre Ω qui transforme C en D.

a) Déterminer l'écriture complexe de r.

b) Calculer l'affixe de D.

17 BAC D 2E SESSION 2005

PARTIE A

On considère l'équation (E) suivante :

$z \in \mathbb{C},\ z^3 + (-4 + i)z^2 + 3z + 8 - i = 0.$

1.Sachant que (E) admet une solution réelle, la calculer .

b) Résoudre (E).

PARTIE B

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}, \vec{v}$), on considère les points A, B et C d'affixes respectives -1 ; 2 + i et 3 – 2i. L'unité est le centimètre.

Soit S la similitude directe de centre A qui applique C sur B.

1. Placer A, B et C.

2. Démontrer que l'écriture complexe de S est : $z' = \frac{i+1}{2} z + \frac{i-1}{2}$.

3. Soit M un point du plan différent de A et M' son image par S.

On note z et z' les affixes respectives de M et M'.

a) Démontrer que : $\frac{z'-z}{z'+1} = i$.

b) En déduire que le triangle AMM' est rectangle et isocèle en M' et de sens direct.

c) Soit D l'image de B par S et soit E l'antécédent de C par S.

Construire géométriquement D et E sans calculer leurs affixes. Justifier.

18 BAC D 4E SESSION 2003

Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}, \vec{v}$) . L'unité graphique est 2 cm. On donne le point B d'affixe 2i.

On considère la transformation S du plan d'écriture complexe $z' = (1 - i)z + 2i$.
1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S.
2. Calculer l'affixe du point N image de B par S.
3. On appelle A le point d'affixe 2.
a) Faire une figure.
b) Démontrer que le triangle ABN est rectangle isocèle en B.
c) Déterminer l'affixe du point K tel que BAKN est un carré.

19 BAC D 3E SESSION 2004

On considère l'équation (E) suivante :
$z \in \mathbb{C}$,
$z^3 - (3 + 2i)z^2 + (3 + 5i)z - 2 - 6i = 0$.
1. a) Sachant que (E) admet une solution imaginaire pure, la calculer .
b) Résoudre (E).
2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$), on considère les points A, B et C d'affixes respectives 2i ; 1 - i et 2 + i. L'unité est 4 cm.
Soit S la similitude directe de centre O qui transforme A en B.
a) Déterminer le rapport et l'angle de S.
b) Déterminer l'écriture complexe de S.
c) D est l'image du point B par S.
Calculer l'affixe de D.

21 BAC D REMPLACEMENT 1995

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $p = 2 + 2i$; $q = -4 + 2i$ et $r = 2 - i$. L'unité est le centimètre.
1. Faire une figure.
2.a) Calculer $\frac{r-p}{q-p}$.
b) En déduire la nature du triangle ABC.
3. Soit S la similitude directe de centre A qui transforme B en C.
a) Déterminer l'écriture complexe de S.
b) En déduire l'affixe de l'image C' du point C par S et placer C'.
c) Donner les éléments caractéristiques de la similitude S.
4. a) Démontrer que les points A, B et C' sont alignés et que BCC' est un triangle rectangle.
b) Soit ($\mathscr{D}$) la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x$ et ($\mathscr{D}'$) son image par la similitude S.
Construire ($\mathscr{D}$) et ($\mathscr{D}'$) .

17 BAC D REMPLACEMENT 1998

On considère l'équation (E) suivante :$z \in \mathbb{C}$,
$z^3 - (7 + 6i)z^2 + (10 + 26i)z + 6 - 24i = 0$.
1. a) Sachant que (E) admet une solution réelle, la calculer .
b) Résoudre (E).
2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) où L'unité est 2 cm.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives $1 + i$; 3 et $3 + 5i$.
a) Placer A, B et C et démontrer que le triangle ABC est rectangle.
b) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe S de centre A qui transforme B en C.
3. a) Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère ABDC soit un rectangle.
b) Déterminer l'affixe Ω du centre du rectangle ABDC.
c) Construire l'image par S du cercle circonscrit au rectangle ABDC. Justifier.

11

PROBABILITÉS

COURS 201

TRAVAUX PRATIQUES 213

EXERCICES 218

COMMENTAIRES

● **Ce thème** vise à :
- consolider les acquis sur le dénombrement ;
- calculer la probabilité d'un événement ;
- calculer des probabilités conditionnelles.

● **Les notions** d'expériences aléatoires et de probabilité d'un événement sont totalement nouvelles pour les élèves.
On fera le lien entre les fréquences en statistique et la probabilité de l'événement correspondant.

● **On introduira** le vocabulaire des probabilités au travers de situations concrètes.
On apprendra à reconnaître l'univers et les évènements élémentaires d'une expérience aléatoire. Le choix de l'univers est fondamentale et ne modifie pas dans certains cas les résultats de calcul de probabilité.

● **Il faudra** consolider les connaissances acquises en première sur le dénombrement des ensembles finis à l'occasion d'exercices de probabilités.

● **La notion** de variable aléatoire permet de synthétiser dans des graphiques et des tableaux, les résultats d'une expérience aléatoire. On fera remarquer aux élèves qu'une variable aléatoire est en réalité une fonction.
La mise en place des notions d'espérance mathématique et de variance se fera sur des exemples.
Les formules générales seront données par comparaison avec leur équivalent en statistique.
Par exemple on remarquera le lien entre moyenne et espérance mathématique.
● **On pourra** introduire la notion de probabilité conditionnelle à l'aide des arbres de choix ou des tableaux à double entrée.
On se placera dans des situations ayant du sens. En particulier on présentera des applications des probabilités en biologie et en économie.
● **On habituera** les élèves à reconnaitre une situation où la loi binomiale doit être appliquée (Épreuves répétées identiques indépendantes)

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES
PROBABILITES 1.Vocabulaire 2.Définition d'une probabilité dans le cas d'une équiprobabilité 3.Propriété PROBABILITES CONDITIONNELLES 1. $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ 2. Evénements indépendants VARIABLES ALEATOIRES 1.Définition d'une variable aléatoire 2.Loi de probabilité 3.Fonction de répartition 4.Espérance mathématique 5.Variance , écart-type LOI BINOMIALE 1.Probabilité d'obtenir k succès dans une suite de n épreuves de Bernoulli $(0 \leq k \leq n)$ 2.E(X)= np V(X)= np(1-p)	☞ Dénombrer dans le cas d'une expérience conduisant à un nombre finie d'éventualités : - les cas possibles d'une expérience ; - les cas favorables d'un événement . ☞ Calculer la probabilité d'un événement. ☞ Calculer la probabilité conditionnelle d'un événement par rapport à rapport à un événement de probabilité non nulle. ☞ Justifier que deux événements sont indépendants. ☞ Une variable aléatoire étant donnée : - déterminer sa loi de probabilité et sa fonction de répartition ; - construire sa fonction de répartition ; - calculer son espérance mathématique ; - calculer sa variance et son écart-type. ☞ Calculer la probabilité d'obtenir k succès dans une suite de n épreuves de Bernoulli. $(0 \leq k \leq n)$

COURS

I. VOCABULAIRE

Nous allons introduire le vocabulaire des probabilités à l'aide de l'exemple suivant :

Exemple

On lance un dé cubique deux fois de suite dans le but de former un nombre de deux chiffres.
Le chiffre des unités est le chiffre obtenu au 1er lancer et le chiffre des dizaines est le chiffre obtenu au 2e lancer.

1. Eventualités, Univers, Événements

● Le résultat obtenu à l'issue de cette expérience est imprévisible. On dit que cette expérience est **aléatoire**.
● Les nombres 22 ; 16 ; 61 ; 42 sont des résultats possibles.
Chaque résultat est une **éventualité**.
● L'ensemble des éventualités constitue **l'univers** noté souvent Ω.
Ici chaque résultat est un couple : Card(Ω) = $6^2 = 36$.
● Soit le sous-ensemble A = $\{15; 24; 33; 42; 51\}$.
On dit A est l'événement : « obtenir un nombre dont la somme des chiffres est égale à 6 ».
Toute partie de l'univers est un **événement.**
● Soient :
l'événement B : « obtenir un nombre dont la somme des chiffres est égale à 12 ».
l'événement C : « obtenir un nombre supérieur à 70 ».
l'événement D : « obtenir un nombre inférieur à 70 ».
On a : B = $\{66\}$; C = ∅ ; D = Ω.
B contient une seule éventualité. On dit que B est un **événement élémentaire**.
L'événement C est appelé **événement impossible**.
L'événement D est appelé **événement certain**.

2. Réunion de deux événements, intersection de deux événements

Soient les événements suivants :
E : « obtenir un nombre pair supérieur à 50 » ;
F : « obtenir un nombre dont la somme des chiffres est égale à 7 ».
L'événement « E ou F » est $E \cup F$.
L'événement « E et F » est $E \cap F$.
On a : E = $\{52; 54; 56; 62; 64; 66\}$ et F = $\{16; 25; 34; 43; 52; 61\}$.
$E \cup F = \{16; 25; 34; 43; 52; 54; 56; 61; 62; 64; 66\}$.
$E \cap F = \{52\}$.

3. Evénements contraires

Soient les événements suivants :
G : « obtenir un nombre pair » ;
H : « obtenir un nombre impair ».
On remarque que : $G \cup H = \Omega$ et $G \cap H = \emptyset$.

On dit que G et H sont **contraires**.
On note $G = \overline{H}$ ou $H = \overline{G}$.

4. Evénements incompatibles

Soient les événements suivants :
G : « obtenir un nombre pair » ;
K = {53; 41} ».
On remarque que : $G \cap K = \emptyset$. On dit que G et K sont **incompatibles**.

II. PROBABILITÉ D'UN ÉVÉNEMENT

Dans toute la suite, on considère une expérience aléatoire conduisant à un nombre fini n d'éventualités et on note Ω l'univers associé.

1. Equiprobabilité

Exemple

On lance un dé équilibré à six faces notées 1, 2, 3, 4, 5, 6.
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
A l'issue d'un lancer, on peut observer que chaque événement élémentaire a la même chance d'être réalisée, soit une chance sur six
On dit que la **probabilité** de chaque événement élémentaire est égale à $\frac{1}{6}$.
On dit alors que les événements élémentaires sont **équiprobables**.
Considérons l'événement A : « obtenir un nombre pair ».
On a : A = {2; 4; 6}.
On dit que l'événement A a 3 chances sur 6 d'être réalisé.
On dit que la **probabilité** de A est égale à $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Définition

Lorsque les événements élémentaires ont tous la même chance d'être réalisés, on dit que les événements élémentaires sont équiprobables.
Dans ce cas, on dit que l'expérience aléatoire se réalise sous l'hypothèse d'équiprobabilité**.**

Dans toute la suite, les expériences aléatoires sont considérées sous l'hypothèse d'équiprobabilité.

2. Probabilité d'un événement

Définition

On appelle probabilité d'un événement A le nombre réel noté P(A) tel que
$\boldsymbol{P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{Nombre\ de\ cas\ favorables\ à\ A}{Nombre\ de\ cas\ possibles}}$.

Exemple

Une urne contient 3 boules noires et 5 boules rouges indiscernables au toucher.
On tire, au hasard et simultanément trois boules de l'urne.
Calculer la probabilité que le tirage contienne exactement deux boules noires .

L'univers Ω est l'ensemble des combinaisons de 3 boules prises parmi 8.
Card(Ω) $= C_8^3 = 56$.
Notons A : « Le tirage contient exactement deux boules noires ».
A est réalisé lorsqu'on tire exactement 2 boules noires parmi 3 et 1 boule parmi les 5 rouges.
Donc : Card(A) $= C_3^2 \times C_5^1 = 15$.
Ainsi : P(A) $= \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{15}{56}$.

3. Propriétés

- La probabilité d'un événement élémentaire est $\frac{1}{\boldsymbol{Card}\Omega}$.
- La somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1.
- Pour tout événement A, on a : $0 \leq P(A) \leq 1$.
- $P(\emptyset) = 0$ et $P(\Omega) = 1$.
- Si A et B sont deux événements incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- Si A et B sont deux événements quelconques, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Pour tout événement A : $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

Exemple 1

Une urne contient 3 jetons gris et 5 jetons rouges indiscernables au toucher.
On tire au hasard, successivement et sans remise trois jetons de l'urne.
Calculer la probabilité des événements suivants :
A : « Le tirage contient deux jetons de la même couleur » ;
B : « Le tirage contient au moins un jeton gris » .

L'univers Ω est l'ensemble des arrangements de 3 jetons pris parmi 8.
Card(Ω) $= A_8^3 = 336$.
● *Désignons par A_1 et A_2 les événements :*
A_1: *« Le tirage contient deux jetons gris » ;* A_2: *« Le tirage contient deux jetons rouges » .*
P(A) = P($A_1 \cup A_2$)= P(A_1) + P(A_2) − P($A_1 \cap A_2$).
Card(A_1) $= C_3^2 \times A_3^2 \times A_5^1 = 90$. *Donc P($A_1$)* $= \frac{Card(A_1)}{Card(\Omega)} = \frac{90}{336} = \frac{15}{56}$.
Card(A_2) $= C_3^2 \times A_5^2 \times A_3^1 = 180$. *Donc :* $P(A_2) = \frac{Card(A_2)}{Card(\Omega)} = \frac{180}{336} = \frac{15}{28}$.
A_1 *et* A_2 *sont incompatibles donc* $P(A_1 \cap A_2) = 0$.
Ainsi : P(A) $= \frac{15}{56} + \frac{15}{28} = \frac{45}{56}$.
● *Soit $\bar{B}$: « Le tirage ne contient pas de jeton gris » .*
Card($\bar{B}$) $= A_5^3 = 60$. *Donc :* $P(\bar{B}) = \frac{Card(\bar{B})}{Card(\Omega)} = \frac{60}{336} = \frac{5}{28}$.
Ainsi : P(B) $= 1 - \frac{5}{28} = \frac{23}{28}$.

Exemple 2

Un libraire propose 30 titres différents d'un même auteur : 5 de ces livres sont couverts de cuir et coûtent 9000 francs l'un ; 12 ont une couverture toilée et coûtent 6000 francs l'un ; les autres sont cartonnés et coûtent 3000 francs l'un.
Un client vient acheter 3 livres de cet auteur sans préciser de livre particulier. Le libraire prend au hasard 3 livres de sa collection.
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A « Le libraire choisit 3 livres couverts de cuir »
B « Le libraire choisit au moins un livre couvert de cuir »
C « Le libraire choisit 3 livres ayant la même couverture »
D « Le libraire choisit 3 livres pour un montant exact de 15000 francs »
E « Le libraire choisit 3 livres dont le coût n'excède pas 12 000 francs ».

Solution

●*L'univers* Ω *est l'ensemble des combinaisons de 5 livres pris parmi 30.*

D'où Card(Ω) = $C_{30}^{3} = 4060$.

Parmi les livres, 5 sont couverts de cuir, l'événement A consiste à *choisir simultanément 3 livres parmi ces 5.*

Card(A) = $C_5^3 = 10$. *Donc P(A)* = $\frac{10}{4060} = \frac{1}{406}$.

● *L'événement contraire* $\overline{B}$ *de B consiste à choisir 3 livres parmi les 25 non couverts de cuir. On a donc* $Card(\overline{B}) = C_{25}^3 = 2300$. $Donc\ P(\overline{B}) = \frac{2300}{4060} = \frac{115}{203}$.

Par suite : $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = \frac{88}{203}$.

● *L'événement C consiste à choisir soit 3 livres couverts de cuir, soit 3 livres de couvertures toilées, soit 3 livres de couvertures cartonnées.*

Donc $Card(C) = C_5^3 + C_{12}^3 + C_{13}^3 = 516$.

$P(C) = \frac{516}{4060} = \frac{129}{1015}$.

● *Il y a deux situations possibles pour la réalisation de l'événement D :*

Première situation *: le libraire choisit 1 livre de 3000 et 2 livres de 6000.*

Deuxième situation *: le libraire choisit 2 livres de 3000 et 1livre de 9000.*

Donc $Card(D) = C_{13}^1 \times C_{12}^2 + C_{13}^2 \times C_5^1 = 1248$. $P(D) = \frac{1248}{4060} = \frac{312}{1015}$.

●*Il y a deux situations possibles pour la réalisation de l'événement E :*

Première situation *: le libraire choisit 3 livres de 3000 .*

Deuxième situation *: le libraire choisit 2 livres de 3000 et un livre de 6000.*

Donc $Card\ E = C_{13}^3 + C_{13}^2 \times C_{12}^1 = 1222$ *et* $P(E) = \frac{1222}{4060} = \frac{611}{2030}$

III. PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Activité

un test est réalisé sur l'efficacité d'un vaccin.
1000 personnes participent au test. Les résultats sont résumés dans le tableau suivant

	Vacciné	Non vacciné	total
malade	120	180	300
Non malade	480	220	700
Total	600	400	1000

On choisit une personne au hasard parmi les 1000 personnes en supposant qu'il y a équiprobabilité.
On considère les événements suivants :
V : « la personne a été vaccinée » ;
M : « la personne est tombée malade ».
1. Calculer les probabilités p(V) et p(V ∩ M) et interpréter les résultats.
2. Restreignons l'étude à l'ensemble des personnes vaccinées.
On choisit une personne au hasard parmi les personnes vaccinées.
a) Calculer la probabilité de l'événement E : «la personne choisie est malade » .
L'événement E peut être interprété comme suit : « La personne est tombée malade sachant qu'elle a été vaccinée ».
P(E) est notée P(M/V) ou $P_V(M)$.
3. a) Calculer P(V ∩ M).
b) Comparer P(M/V) et $\frac{P(V \cap M)}{P(V)}$.
3. Calculer la probabilité qu'une personne soit tombée malade sachant qu'elle n'a pas été vaccinée.

1. Définition

Soit A et B deux évènements de Ω tels que P(B) ≠ 0.
On appelle **probabilité conditionnelle de A sachant que B** est réalisé, le nombre réel noté P(A/B) ou $P_B(A)$ tel que
P(A/B) = $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Remarque :
Il est fréquent que l'expérience permette le calcul direct de P(A/B).

2. Propriété

Soit A et B deux évènements de Ω tels que P(A) ≠ 0 et P(B) ≠ 0. On a :
$P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$;
$P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$.

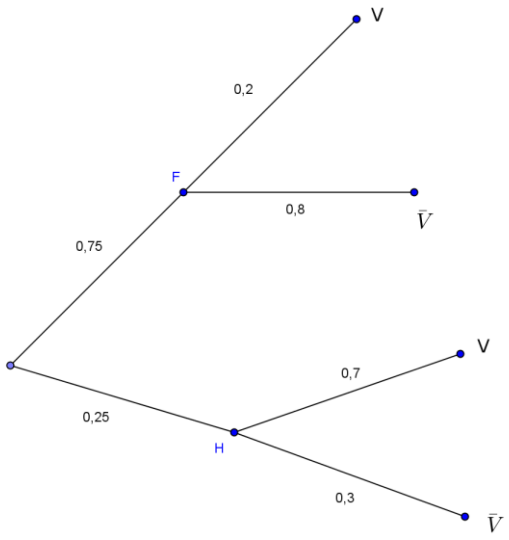
Exemple

Dans un supermarché, 75% des clients sont des femmes. Une femme sur cinq achète un article au rayon vêtements , alors que sept hommes sur dix le font.
On choisit au hasard une personne dans le supermarché.

1. Calculer la probabilité que cette personne achète un article au rayon vêtement sachant que c'est une femme.
2. Calculer la probabilité que cette personne est une femme et achète un article au rayon vêtement.
3. Une personne, choisie au hasard, a fait un achat au rayon vêtements.
Calculer la probabilité que cette personne soit une femme. On donnera l'arrondi au millième du résultat.

Solution
Notons :
F l'événement : « la personne choisie est une femme » ;
H l'événement : « la personne choisie est un homme » ;
V l'événement : « la personne choisie achète un article au rayon vêtement » .

Construisons un arbre pondéré :



1. L*a probabilité que cette personne achète un article au rayon vêtement sachant que c'est une femme est P(V/F) :*
on a : P(V/F) = 0,2 .
2. La probabilité que cette personne est une femme et achète un article au rayon vêtement est P(V∩F).
On a : P(V∩F) = P(V/F) × P(F) = 0,2×0,75 = 0,15 .
3. Cette probabilité est P(F /V).
On a : P(F/V) = $\frac{P(F\cap V)}{P(V)}$.
On a : P(V) = P(V∩F) + P(V∩H).
P(V∩F) = 0,15 d'après ce qui précède.
P(V∩H)) = P(V/H) × P(H) = 0,25×0,7 = 0,175 .
Ainsi: P(V) = 0,15 + 0,175 = 0,325 .
Finalement : $P(F/V) = \frac{P(F\cap V)}{P(V)} = \frac{0,15}{0,325} \approx 0,462$.

3. Evénements indépendants

Définition

Soit A et B deux événements tels que B soit de probabilité non nulle.
A et B sont dits indépendants si $P_B(A) = P(A)$.

Interprétation
Les événements A et B sont indépendants lorsque la réalisation de l'un n'influe pas la réalisation de l'autre.

Exemple

On dispose des informations suivantes sur les élèves d'un lycée .

	Portent des lunettes	Ne portent pas de lunettes	total
Fille	150	450	600
Garçon	100	300	400
Total	250	750	1000

On choisit un élève au hasard parmi les 1000 en supposant qu'il y a équiprobabilité.
Soient les événements :
L : « l'élève porte des lunettes »
F : « l'élève est une fille » et G : « l'élève est un garçon ».
Les événements F et L sont-ils sont indépendants ?
On a : $P(L) = \frac{250}{1000} = 0{,}25$ et $P(L / F) = \frac{150}{600} = 0{,}25$.
Comme $P(L) = P(L / F)$ alors L et F sont indépendants.

Propriété

Deux événements A et B sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Exemple

On lance deux fois de suite un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note le chiffre apparu sur la face supérieure. On note :
A : « le chiffre 5 sort en premier ».
B : « la somme des chiffres apparus est 7 ».
C : ‹‹le chiffre 6 sort en premier ››
D : ‹‹ la somme des chiffres apparus est 12››.
a) A et B sont-ils indépendants ?
b) C et D sont-ils indépendants ?

Solution

a) L'univers Ω est l'ensemble de tous les couples de deux chiffres pris entre 1 et 6.
Card (Ω) = 6^2 = 36
A = {(5 ; 1) ; (5 ; 2) ; (5 ; 3) ; (5 ; 4) ; (5 ; 5) ; (5 ; 6)}. D'où $p(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
B = {(6 ; 1) ; (1 ; 6) ; (5 ; 2) ; (2 ; 5) ; (4 ; 3) ; (3 ; 4)}. D'où $p(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. .
A∩B= {(5 ; 2)}, donc $p(A \cap B) = \frac{1}{36}$.
On a $p(A \cap B) = \frac{1}{36}$ *et* $p(A) \times p(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. ,
Donc $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$. *Les événements A et B sont indépendants.*
b) C= {(6 ; 1) ; (6 ; 2) ; (6 ; 3) ; (6 ; 4) ; (6 ; 5) ; (6 ; 6)}, donc $p(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ ..
D = {(6 ; 6)}, d'où $p(D) = \frac{1}{36}$ ..
C∩D = {(6 ; 6} donc $p(C \cap D) = \frac{1}{36}$ ..
Ici p(C∩D) ≠ p(C) × p(D), donc les événements C et D ne sont pas indépendants.

Propriétés

Si A et B sont deux événements indépendants alors :
$\overline{A}$ *et* $\overline{B}$ sont indépendants ;
$\overline{A}$ *et* B sont indépendants ;
A *et* $\overline{B}$ sont indépendants.

IV. SCHÉMA DE BERNOULLI

Exemple

On lance un dé cubique 5 fois de suite.
Quelle est la probabilité de l'événement A : « obtenir exactement 4 fois un multiple de 3 » ?

Solution
Considérons l'expérience : lancer le dé une fois.
$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
Notons S : « obtenir un multiple de 3 à l'issue d'un lancer ».
P(S) = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ *et P(*$\bar{S}$*)* $= \frac{2}{3}$.
Les cinq lancers étant indépendants, chaque résultat peut être considéré comme une 5-listes formée de quatre S et un $\bar{S}$.
Exemples : $(S, S, \bar{S}, S, S)$, $(S, S, S, S, \bar{S})$, $(\bar{S}, S, S, S, S)$.
Comme il y a C_5^4 *de de listes de ce type, alors : P(A) =* $C_5^4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^1$.

Définitions

■ Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire ne conduisant qu'à deux éventualités : l'une est appelée **succès** notée S et l'autre **échec** notée $\overline{S}$.
■ Un **schéma de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui consiste à répéter n fois de suite ($n \geq 2$) une même épreuve de Bernoulli.

Propriété

Soit un schéma de Bernoulli à n épreuves identiques de Bernoulli et p la probabilité du succès.
La probabilité d'obtenir exactement k succès au cours des n épreuves est :

$\boldsymbol{C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}$ **avec** $\boldsymbol{0 \leq k \leq n}$.

Exemple

Un jeu consiste à faire tourner une roue autour de son axe, roue sur laquelle on a marqué un secteur angulaire de 50°.
On déclare qu'il y a succès si la roue s'arrête de telle sorte que la flèche (fixe) soit en face du secteur angulaire de 50°, sinon il y a échec.
On lance la roue 7 fois.
Calculer la probabilité des événements suivants :
A « Obtenir exactement trois succès »
B « Obtenir au moins un succès »
(On donnera l'arrondi d'ordre 2 des résultats)

Solution

Considérons l'épreuve de Bernoulli qui consiste à faire tourner la roue et à observer le secteur indiqué par la flèche. Le succès S « La flèche indique le secteur de 50°» a pour probabilité $P(S) = \frac{50}{360} = \frac{5}{36}$.
L'épreuve étant répétée 7 fois de suite et de façon indépendante, on a un schéma de Bernoulli.
L'événement A « Obtenir exactement 3 succès » a pour probabilité : $P(A) = C_7^3 \left(\frac{5}{36}\right)^3 \left(1 - \frac{5}{36}\right)^4 \approx 0{,}05$.
Pour calculer P(B) considérons l'événement $\overline{B}$ *« Obtenir aucun succès au cours des 7 épreuves »*
$P(\overline{B}) = C_7^0 \left(\frac{5}{36}\right)^0 \left(1 - \frac{5}{36}\right)^7 = \left(\frac{31}{36}\right)^7$ *donc P(B)* $= 1 - \left(\frac{31}{36}\right)^7 \approx 0{,}65$.

V. VARIABLES ALÉATOIRES

Exemple

Un joueur lance trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée.
On gagne 200 F pour chaque « pile » et on perd 100 F pour chaque « face ».
On note X le gain du joueur à l'issue des trois lancers.
1. Quelles sont les valeurs possibles de X ?
2. Déterminer pour chaque valeur k prise par X, la probabilité P(X = k).

1. On a : $\Omega = \{PPP, PPF, PFP, FPP, PFF, FPF, FFP, FFF\}$. $Card(\Omega) = 8$.

Eventualités	*PPP*	*PPF*	*PFP*	*FPP*	*PFF*	*FPF*	*FFP*	*FFF*
Gain X	*600*	*300*	*300*	*300*	*0*	*0*	*0*	*- 300*

Les valeurs possibles de X sont: -300; 0; 300; 600.

2. On a :

k	*-300*	*0*	*300*	*600*
P(X= k)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

1. Variable aléatoire

Définition

■ Une variable aléatoire est une application de Ω dans IR.
■ X étant une variable aléatoire, considérons X(Ω) = $\{x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_n\}$ l'ensemble des valeurs possibles de X. X(Ω) est appelé l'univers image de Ω par X.
■ La loi de probabilité de X est l'application de X(Ω) dans $[0; 1]$ qui à chaque valeur x_i de X(Ω) associe la probabilité que X prenne la valeur x_i , notée **P($X = x_i$).**

NB : Il est commode de représenter une loi de probabilité par un tableau du type :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Dans ce tableau il est préférable de ranger les valeurs prises par X dans l'ordre croissant.

Remarque : $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

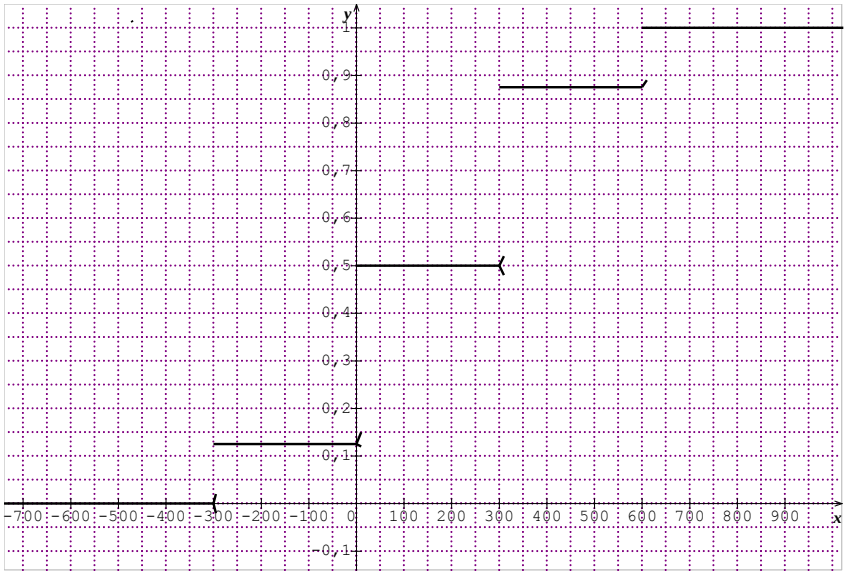
2. Fonction de répartition

Définition

La fonction de répartition de X est l'application de IR dans $[0; 1]$ qui à tout nombre réel x associe la probabilité **que X prenne une valeur inférieure ou égale à x ,** notée **P($X \leq x$).**

Exemple

Considérons la loi de probabilité de la variable aléatoire X de l'exemple ci-dessus :
La fonction F de répartition de X est définie sur IR par :
Pour tout $x \in]-\infty; -300[$ $F(x) = 0$
Pour tout $x \in [-300; 0[$ $F(x) = \frac{1}{8}$
Pour tout $x \in [0; 300[$ $F(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$
Pour tout $x \in [300; 600[$ $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$
Pour tout $x \in [600; +\infty[$ $F(x) = \frac{7}{8} + \frac{1}{8} = 1$.



3. Espérance mathématique

Définition

Soit une variable aléatoire X prenant n valeurs x_1 ; x_2 ; … ; x_n avec les probabilités respectives p_1 ; p_2 ; … ; p_n.

On appelle espérance mathématique de X le nombre réel noté E(X) tel que :
E(X) = $x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$.

Remarques

● E(X) est la moyenne des valeurs x_i pondérées par les valeurs p_i.

● En terme de jeu, lorsque X désigne le gain du joueur, E(X) représente le **gain moyen** que peut espérer le joueur sur un grand nombre de parties.

- Lorsque $E(X) > 0$, le jeu est **avantageux pour le joueur**.
- Lorsque $E(X) < 0$, le jeu est **désavantageux pour le joueur**.
- Lorsque $E(X) = 0$, le jeu est **équitable**.

Exemple

Reprenons le tableau de l'exemple ci-dessus.

k	*-300*	*0*	*300*	*600*
P(X= k)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

E(X) = $(-300) \times \frac{1}{8} + (0) \times \frac{3}{8} + (300) \times \frac{3}{8} + (600) \times \frac{1}{8} = 150.$

Le gain moyen du joueur est 150 F.

4. Variance et écart type

Définitions

Soit une variable aléatoire X prenant n valeurs x_1 ; x_2 ; ... ; x_n avec les probabilités respectives p_1 ; p_2 ; ... ; p_n dont l'espérance mathématique est E(X).

■ On appelle variance de X le nombre réel positif noté V(X) tel que :
V(X) = $(x_1 - E(X))^2 p_1 + (x_2 - E(X))^2 p_2 \quad + \cdots + (x_n - E(X))^2 p_n$
ou V(X) = ${x_1}^2 p_1 + {x_2}^2 p_2 \quad + \cdots + {x_n}^2 p_n - [\mathrm{E(X)}]^2$.
■ On appelle écart type de X le nombre réel noté σ(X) tel que : $\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{V(X)}$.

Dans l'exemple précédent :
V(X) = $(-300)^2 \times \frac{1}{8} + (0)^2 \times \frac{3}{8} + (300)^2 \times \frac{3}{8} + (600)^2 \times \frac{1}{8} - (150)^2 = 67500.$
$\sigma(X) = \sqrt{67500} \approx 259{,}81.$

5. Loi binomiale

Propriété

Soit un schéma de Bernoulli à n épreuves identiques de Bernoulli, p la probabilité du succès et X la variable aléatoire désignant le nombre k de succès au cours des n épreuves ($0 \leq k \leq n$).

■ La loi de probabilité de X est définie par : $\boldsymbol{P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}$.
Cette loi de probabilité est appelée loi binomiale de paramètres $\boldsymbol{n}$ *et* $\boldsymbol{p}$.
■ Dans ce cas : $\boldsymbol{E(X) = np}$ et $\boldsymbol{V(X) = np(1-p)}$.

TRAVAUX PRATIQUES

Exercice résolu 1

Une enquête est faite auprès de la population étudiante d'un campus universitaire.
On note F la population féminine, I l'ensemble des étudiants, garçons et filles sachant jouer d'un instrument de musique. L'enquête révèle que F représente 48% de la population étudiante et I représente 40%.
Chez les étudiants du groupe I, 45% sont des filles.
On interroge une fille du campus.
Quelle est la probabilité pour que cette fille sache jouer d'un instrument de musique ?

Solution

F représente 48% de la population étudiante, donc p(F)= 0,48 ;
I représente 40% de la population étudiante, donc p(I) = 0,4.
Chez les étudiants du groupe I, 45% sont des filles, donc $p_I(F)=0,45$.
On cherche $p_F(I)$.
On sait que $P_F(I) = \frac{P(F \cap I)}{P(F)}$ *or* $P(F \cap I) = P(I) \times P_I(F) = 0,4 \times 0,45 = 0,18$ *donc* $P_F(I) = \frac{0,18}{0,48} = \frac{3}{8}$.

Exercice résolu 2

Trois candidats se présentent à une élection.
La répartition des votes selon le candidat et le sexe du votant est donnée par le tableau ci après :

	Candidat A	Candidat B	Candidat C
Femme	42%	13%	5%
Homme	28%	7%	5%

On choisit au hasard un des votants.
Soient les événements :
A : « la personne choisie a voté le candidat A » ; B : « la personne choisie a voté le candidat B » ;
C : « la personne choisie a voté le candidat C » ;
F : « la personne choisie est une femme » et H : « la personne choisie est un homme ».

1. Calculer $P(A \cap F)$, $P(A)$, $P(B)$et $P(C)$
2. Calculer $P(A/F)$ et $P(H/C)$

Solution :

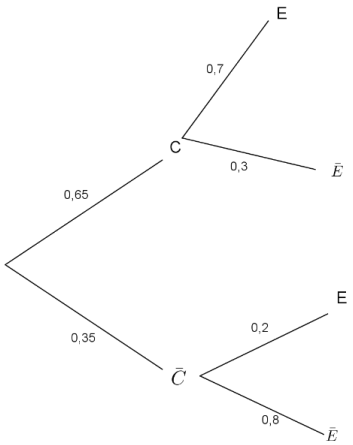
	Candidat A	*Candidat B*	*Candidat C*	*total*
Femme	*42%*	*13%*	*5%*	*60%*
Homme	*28%*	*7%*	*5%*	*40%*
Total	*70%*	*20%*	*10%*	*100%*

1.On a : $P(A \cap F) = \frac{42}{100} = 0{,}42$.
On a: $P(A) = P(A \cap F) + P(A \cap H) = 0{,}42 + 0{,}28 = 0{,}70.$
On a: $P(B) = P(B \cap F) + P(B \cap H) = 0{,}20.$
$P(C) = P(C \cap F) + P(C \cap H) = 0{,}10$.
2. On a: $P(^{A}/_{F}) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{0{,}42}{0{,}60} = 0{,}70.$
On a: $P(^{H}/_{C}) = \frac{P(C \cap H)}{P(C)} = \frac{0{,}05}{0{,}1} = 0{,}5.$

Exercice résolu 3

A la suite d'un sondage effectué à propos de la construction d'un barrage, on estime que :
65% de la population concernée est contre la construction du barrage et parmi ces opposants, 70% sont des écologistes.
Parmi les personnes non opposées à la construction du barrage, 20% sont des écologistes.
On interroge une personne au hasard.
1. Calculer la probabilité qu'une personne interrogée soit opposée à la construction du barrage et soit écologiste.
2. Calculer la probabilité qu'une personne interrogée ne soit pas opposée à la construction du barrage et soit écologiste.
3. En déduire la probabilité qu'une personne interrogée soit écologiste.
4. Sachant qu'une personne interrogée n'est pas écologiste, quelle est la probabilité qu'elle soit contre la construction du barrage ?
NB : Pour faciliter les réponses aux différentes questions, on pourra noter les évènements :
C : « La personne interrogée est contre la construction du barrage » et $\overline{C}$ son évènement contraire.
E : « La personne interrogée est écologiste » et $\overline{E}$ son évènement contraire.

Résolution



On a :

p(C) = 0,65 $\Rightarrow p(\overline{C}) = 1 - 0,65 = 0,35.$

p(E/C) = 0,70 $\Rightarrow p(\overline{E}/C) = 1 - 0,70 = 0,30$

$p(E/\overline{C}) = 0,20 \Rightarrow p(E/\overline{C}) = 1 - 0,20 = 0,80.$

1. L'événement « une personne interrogée est opposée à la construction du barrage et est écologiste » est $C \cap E$ *.* $p(C \cap E) = p(C) \times p(E/C) = 0,65 \times 0,70 = 0,455.$

2. L'événement « une personne interrogée est pour la construction du barrage et est écologiste » est $\overline{C} \cap E$ *.* $p(\overline{C} \cap E) = p(\overline{C}) \times p(E/\overline{C}) = 0,35 \times 0,20 = 0,07.$

3. L'évènement « une personne interrogée est écologiste » est E.

$p(E) = p(C \cap E) + p(\overline{C} \cap E) = 0,525$

4. Il s'agit de l'évènement « une personne interrogée est contre la construction du barrage sachant qu'elle n'est pas écologiste » noté $C/\overline{E}$ *.*

$p(C/\overline{E}) = \dfrac{p(C \cap \overline{E})}{p(\overline{E})}$.

$p(C \cap \overline{E}) = p(C) \times p(\overline{E}/C) = 0{,}65 \times 0{,}30 = 0{,}195$ et $p(\overline{E}) = 1 - p(E) = 1 - 0{,}525 = 0{,}475$.

D'où $p(C/\overline{E}) = \dfrac{0{,}195}{0{,}475} \approx 0{,}410$.

Exercice résolu 4

Un joueur lance successivement trois fois de suite une pièce de monnaie parfaitement équilibrée. Il gagne 600 francs s'il obtient 3 fois « FACE », gagne 300 francs s'il obtient 2 fois « FACE » exactement, gagne 100 francs s'il obtient une fois « FACE » exactement, mais perd 1000 francs s'il n'obtient que des « PILE ».

On désigne par X la variable aléatoire représentant en francs le gain du joueur (un gain est positif ou négatif).

1. Etablir la loi de probabilité de la variable X.
2. Déterminer la probabilité de gagner strictement moins de 300 francs.
3. Calculer l'espérance mathématique de la variable X. Que représente ce résultat pour le joueur ?
4. Un jeu est équitable si l'espérance de X est nulle.
   Le jeu précédant est-il équitable ? favorable ou défavorable au joueur ?
5. Combien le joueur devrait-il perdre lorsqu'il n'obtient que des piles pour que le jeu soit équitable ?

Solution

1. Les résultats possibles sont : (F;F;F) ; (F;F;P) ; (F;P;F) ; (P;F;F) ; (P;P;F) ; (P;F;P) ; (F;P;P) ; (P;P;P).

Les différents résultats possibles donnent les gains suivants : -1000 ; 100 ; 300 ; 600.

$P(X = -1000) = \frac{1}{8}$; $P(X = 100) = \frac{3}{8}$; $P(X = 300) = \frac{3}{8}$; $P(X = 600) = \frac{1}{8}$

x_i	-1000	100	300	600
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

2. Soit A l'événement « Gagner moins de 300F ». Donc $P(A) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$.

3. $E(X) = (-1000)(\frac{1}{8}) + 100(\frac{3}{8}) + 300(\frac{3}{8}) + 600(\frac{3}{8}) = 250$ *.Le gain moyen du joueur est 250F.*

4. E(X) > 0 donc le jeu est favorable au joueur.

5. Soit S le montant que le joueur devrait perdre s'il n'obtenait que des PILES pour que le jeu soit équitable.

$E(X) = (-S)(\frac{1}{8}) + 100(\frac{3}{8}) + 300(\frac{3}{8}) + 600(\frac{3}{8}) = \frac{3000-S}{8}$.

Le jeu est équitable lorsque E(X) = 0.

$E(X) = 0 \Leftrightarrow \frac{3000-S}{8} = 0 \Leftrightarrow S = 3000$.

Le joueur doit perdre 3000F lorsqu'il n'obtient que des PILES pour que le jeu soit équitable.

Exercice résolu 5

Sur une route, deux carrefours sont munis de feux tricolores A et B. On supposera que ces feux ne sont pas synchronisés et que pour un automobiliste circulant sur cette route, l'apparition d'une couleur donnée est un pur hasard. On admet que la probabilité pour que le feu A soit vert est $\frac{3}{4}$, la probabilité pour que le feu B soit vert est $\frac{1}{2}$.

Les feux A et B fonctionnent de manière indépendante.

1. Un automobiliste passe successivement aux deux carrefours.

a) Calculer la probabilité pour qu'il rencontre deux feux verts.

b) Calculer la probabilité pour qu'il rencontre au moins un feu vert.

2. Un autre automobiliste passe 5 fois au carrefour muni du feu A.

Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de fois où l'automobiliste rencontre le feu vert.

a) Calculer la probabilité pour que l'automobiliste rencontre exactement 3 fois le feu vert.

b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X.

Donner l'arrondis d'ordre zéro de l'espérance mathématique de X et l'interpréter.

Solution

1. a) *Soit l'événement A « le feu A est vert » et l'événement B « Le feu B est vert ».*

Les événements A et B sont indépendants.

On a donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$.

b) *Soit l'événement C « l'automobiliste rencontre au moins un feu vert » et* $\overline{C}$ *l'événement contraire de C.*

On a $\overline{C} = \overline{A} \cap \overline{B}$ *, et comme* $\overline{A}$ *et* $\overline{B}$ *sont indépendants alors :*

$P(\overline{C}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \times P(\overline{B}) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. *D'où* $P(C) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

2. a) *Lorsque l'automobiliste se présente au carrefour A, on s'intéresse à deux résultats : S « il rencontre le feu vert » et* $\overline{S}$ *« il ne rencontre pas le feu vert ». Cette expérience est un épreuve de Bernoulli. On a* $P(S) = \frac{3}{4}$

L'épreuve étant répétée 5 fois de suite et de façon indépendante, la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 5 \; et \; p = \frac{3}{4}$.

La probabilité pour que l'automobiliste rencontre exactement 3 fois le feu vert est :

$P(X = 3) = C_5^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{270}{1024} \approx 0{,}26$

b) *Ici, il est préférable d'utiliser les formules* $E(X) = np \; et \; V(X) = np(1-p)$ *puisque X suit une loi binomiale de paramètres* $n \; et \; p$.

Ainsi, $E(X) = 5 \times \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$ *et* $V(X) = 5 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{15}{16}$

$E(X) \approx 4$ *. L'automobiliste rencontre en moyenne 4 feux verts.*

L'événement A « Obtenir exactement 3 succès » a pour probabilité : $P(A) = C_7^3 \left(\frac{5}{36}\right)^3 \left(1 - \frac{5}{36}\right)^4 \approx 0{,}05$

Pour calculer P(B) considérons l'événement $\overline{B}$ *« Obtenir aucun succès au cours des 7 épreuves »*

$P(\overline{B}) = C_7^0 \left(\frac{5}{36}\right)^0 \left(1 - \frac{5}{36}\right)^7 = \left(\frac{31}{36}\right)^7$ *donc P(B)* $= 1 - \left(\frac{31}{36}\right)^7 \approx 0{,}65.$

EXERCICES

1 Une urne contient douze boules indiscernables au toucher : 8 boules blanches et 4 boules noires.
On tire successivement 3 boules de l'urne, la boule tirée étant remise dans l'urne après chaque tirage.
1. Calculer la probabilité d'obtenir exactement une boule blanche.
2. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche et au moins une boule noire.
(On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles).

2 **Partie I**
Lors de la préparation d'un concours, un élève n'a étudié que 50 des 100 leçons.
On a mis 100 papiers contenant chacun une question dans une urne, ces questions portant sur des leçons différentes. Le candidat tire simultanément au hasard 2 papiers.
On donnera les réponses sous forme de fractions irréductibles.
1. Quelle est la probabilité qu'il ne connaisse aucun de ces sujets ?
2. Quelle est la probabilité qu'il connaisse les deux sujets ?
3. Quelle est la probabilité qu'il connaisse un et un seul de ces sujets ?
4. Quelle est la probabilité qu'il connaisse au moins un de ces sujets ?

Partie II
On considère maintenant que l'élève a étudié n des 100 leçons (n étant un entier naturel inférieur ou égal à 100).
1. Quelle est la probabilité p_n qu'il connaisse au moins un de ces sujets ?
2. Déterminer les entiers n tels que p_n soit supérieur ou égal à 0,95.

3 Dans cet exercice, tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.
Partie I :
On dispose d'un dé cubique A parfaitement équilibré possédant une face verte, deux faces noires et trois faces rouges.
Un jeu consiste à lancer trois fois de suite et de manière indépendante ce dé. On note à chaque lancer la couleur de la face obtenue.
1. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, deux faces exactement soient noires.
2. Soit l'événement C : « à l'issue d'un jeu, les deux faces exactement soient de la même couleur ».
Calculer la probabilité de l'événement C.
3. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les trois faces obtenues soient de couleurs différentes.

Partie II
On dispose d'un second dé cubique B équilibré présentant quatre faces vertes et deux faces noires.
Le nouveau jeu se déroule de la manière suivante : on lance les dés A et B simultanément.
1. Quelle est la probabilité d'obtenir une seule face verte à l'issue du jeu.
2. Calculer la probabilité d'obtenir deux faces vertes à l'issue du jeu.

4 Sur un disque on a enregistré dix morceaux différents. Le temps d'écoute de chacun d'eux est donné dans le tableau :

Code du morceau enregistré	A	B	C	D
Temps d'écoute en secondes	280	200	240	280

E	F	G	H	I	J
260	240	280	200	240	280

Un appareil de lecture sélectionne au hasard un des dix morceaux et un seul.
Tous les morceaux ont la même probabilité d'être sélectionné.
1. Quelle est la probabilité, pour chacun des morceaux, d'être sélectionné à cette lecture ?
2.a) Calculer la probabilité de l'événement E_1 : « Le morceau sélectionné à une durée d'écoute de 240 secondes ».
b) Calculer la probabilité de l'événement E_2 : « Le morceau sélectionné à une durée d'écoute supérieure à 220 secondes ».
3. On note X la variable aléatoire qui, à tout morceau sélectionné, associe le temps d'écoute de ce morceau.
a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
b) Calculer l'espérance mathématique de X et son écart-type.

5 Deux dés cubiques équilibrés A et B ont leurs faces marquées de la façon suivante :
le dé A : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6.
le dé B ; 1 ; 1 ; 1 ; 3 ; 3 ; 5.
On lance les deux dés et l'on note S la variable aléatoire égale à la somme des points obtenus.
Déterminer la loi de probabilité de S et calculer son espérance mathématique.

6 Un même individu peut être atteint de surdité unilatérale (portant sur une seule oreille) ou bilatérale(portant sur les deux oreilles).
On admet que, dans une population donnée, les deux événements :D :«être atteint de surdité à l'oreille droite» et G :«être atteint de surdité à l'oreille gauche» sont indépendants et tous deux de probabilité 0,05, ce que l'on note
$p(D) = p(G) = 0,05$.
On considère les événements suivants :
B : « être atteint de surdité bilatérale»
U : « être atteint de surdité unilatérale»
S : « être atteint de surdité (sur une oreille au moins)»
N.B. On donnera les valeurs numériques des probabilités sous forme décimale approchée à 10^{-4} près.
1. a) Exprimer les événements B et S à l'aide de G et de D, puis calculer les probabilités p(B) de B et p(S) de S.
b) En déduire la probabilité de U.
2. Sachant qu'un sujet pris au hasard dans la population considérée est atteint de surdité, quelle est la probabilité :
a) Pour qu'il soit atteint de surdité à droite ?
b) Pour qu'il soit atteint de surdité bilatérale ?
3. On considère un échantillon de 10 personnes prises au hasard dans la population considérée, qui est suffisamment grande pour que les choix puissent être assimilés à des choix successifs indépendants.
a) Quelle est la probabilité pour qu'il y ait exactement k personnes atteintes de surdité dans l'échantillon ?
b) Calculer la probabilité pour qu'il n'y ait aucun sujet atteint de surdité dans l'échantillon.

7 BAC D SESSION 2001

Dans une urne se trouvent 6 médaillons identiques indiscernables au toucher numérotés de 1 à 6.
Un jeu consiste à tirer au hasard un médaillon de l'urne après avoir misé une certaine somme versée aux organisateurs du jeu et à recevoir un prix ou non selon le numéro inscrit sur le médaillon tiré.
– Si le joueur tire le médaillon numéroté 4, on lui remet ce qu'il a misé et il gagne 3000F.
– S'il tire le médaillon numéroté 1, 2 ou 6 il perd sa mise et ne gagne rien.
– S'il tire le médaillon numéroté 3 il ne gagne rien mais récupère sa mise.
– S'il tire le médaillon numéroté 5, il le remet dans l'urne et effectue un second tirage.
Si le médaillon retiré,
- porte le même numéro (c'est-à-dire le numéro 5) le joueur gagne 2000F et perd sa mise.
- sinon, il perd sa mise et de plus il paie 1500F aux organisateurs.

1. Calculer la probabilité pour que ce joueur récupère sa mise.
2. Calculer la probabilité pour qu'il perde 1500F et qu'il perde aussi sa mise.
3. Le joueur a misé une somme S.
on note X la variable aléatoire qui à chaque partie, associe le résultat financier de son jeu, c'est-à-dire la différence entre ce que le joueur possédera à l'issue du jeu et ce qu'il possédait avant de jouer.
a) Compléter le tableau ci-dessous définissant la loi de probabilité de la variable X.

x_i	-S	-S – 1500	0	-S + 2000	3000
$p(X = x_i)$					

b) Démontrer que E(X) = $-\frac{2}{3}S + \frac{3125}{9}$.
c) Quelle somme le joueur doit-il miser pour que son résultat financier moyen soit nul ?
(On donnera l'arrondi de cette somme à l'unité près).

8 BAC D SESSION 1997

On lance simultanément deux dés cubiques équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On dit qu'on obtient un « double » si les faces supérieures des dés portent des chiffres identiques.
A chaque lancer, si le joueur fait un double, il gagne 500 F ; sinon il perd 100 F.
1. On lance les dés une fois.
Calculer la probabilité de gagner 500 F.
2. On lance les dés trois fois de suite dans des conditions indépendantes.
Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur sur l'ensemble des trois lancers.
a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Déterminer l'espérance mathématique de X et interpréter le résultat.
3. On lance les dés n fois de suite dans des conditions indépendantes.
a) Calculer la probabilité p_n de faire au moins un double sur les n lancers.
b) Quelle est la valeur minimale de n pour que l'on ait : $p_n \geq 0{,}9$?.

9 Un libraire propose 30 titres différents d'un même auteur : 5 de ces livres sont couverts de cuir et coûtent 180 francs l'un ; 12 ont une couverture toilée et coûtent 120 francs l'un ; les autres sont cartonnés et coûtent 60 francs l'un.
Un client vient acheter 3 livres de cet auteur sans préciser de livre particulier. Le libraire prend au hasard 3 livres de sa collection.
1. Combien y a-t-il de choix possibles ?
2. Quelle est la probabilité p_1 d'avoir choisi 3 livres couverts de cuir ?
3. Quelle est la probabilité p_2 d'avoir choisi 3 livres ayant la même couverture ?
4. Quelle est la probabilité p_3 d'avoir choisi 3 livres pour un montant exact de 300 francs ?
5. Le client s'est donné pour objectif de ne pas dépenser plus de 300 francs. Quelle est la probabilité p_4 pour que les trois livres présentés par le libraire puissent convenir au client ?

10 1. Un dé A, bien équilibré, possède :
– une face numérotée 1 ;
– deux faces numérotées 2 ;
– une face numérotée 4 ;
– une face numérotée 5 ;
– une face numérotée 6.
a) On lance une le dé et on lit le numéro inscrit sur la face supérieure.
Quelle est la probabilité d'obtenir le numéro 2 ?
b) On lance 3 fois de suite le dé et on note de la gauche vers la droite les chiffres obtenus successivement.
On obtient ainsi un nombre de trois chiffres.
Quelle est la probabilité d'obtenir le nombre 421 ?
2. Un autre dé B, bien équilibré, possède :
– une face numérotée 1
– deux faces numérotées 2
– deux faces numérotées 4
– une face numérotée 6
On lance 3 fois de suite le dé B comme à la question 1.b).
Vérifier que la probabilité d'obtenir le nombre

421 est égale à $\frac{1}{54}$.

3. Une urne contient 4 dés identiques au dé A et 6 dés identiques au dé B.
Egny tire au hasard un dé de l'urne et le lance 3 fois de suite pour obtenir un nombre de trois chiffres comme décrit précédemment.
a) Démontrer que la probabilité d'obtenir 421 est égale à $\frac{2}{135}$.
b) Egny a obtenu 421 ; calculer la probabilité qu'il ait joué avec un dé du type A.

11 Le chargement d'un camion remorque est composé de 60 sacs identiques dont 10 contiennent un produit non déclaré aux services de douanes. Le trajet à parcourir comporte trois barrages de douane.
A chacun de ces barrages, le contrôle obligatoire consiste à examiner le contenu de 5 sacs choisis au hasard (les contrôles effectués aux différents barrages sont indépendants).
1. Le camion arrive à un barrage donné.
(On donnera l'arrondi d'ordre 1 de chacun des résultats obtenus).
a) Calculer la probabilité pour qu'exactement 2 des 5 sacs contrôlés contiennent le produit non déclaré.
b) Démontrer que la probabilité pour que l'un au moins des sacs contrôlés contienne le produit non déclaré est égal à 0,6.
2. Le camionneur sait que si l'un au moins des sacs du produit non déclaré est découvert à un barrage quelconque, il doit payer une taxe forfaitaire de 10.000 francs (dix mille francs) à ce barrage pour être autorisé à continuer son chemin avec son chargement. Si le camionneur ne peut pas payer la taxe forfaitaire, tout son chargement est saisi.

i) On suppose que le camionneur paie la taxe chaque fois que le produit non déclaré est découvert.
On note X la variable aléatoire égale à la somme totale que le camionneur peut ainsi dépenser sur l'ensemble de son trajet.
a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Démontrer que l'espérance mathématique de X est égale à 18 000.

ii) On suppose que le camionneur n'a pas d'argent pour payer une éventuelle taxe.
Calculer la probabilité pour que son chargement soit saisi.
(On donnera l'arrondi d'ordre 1 de chacun des résultats obtenus).

12 Les mille billets d'une loterie sont numérotés à l'aide d'une suite de 3 chiffres, distincts ou non, pris dans l'ensemble
C = { 0 ;1; 2; 3; 4; 5; 6; 7;8 ;9}
Les billets gagnants sont ceux qui se terminent par 05, par 42 ou par 70. Tous les billets sont supposés vendus.

1. Monsieur Houameba achète un billet au hasard.
Calculer la probabilité des deux événements suivants :
G : son billet est gagnant
O : son billet porte un numéro contenant au moins un zéro.
2. Sachant que le numéro du billet de Monsieur Houameba contient au moins un zéro, quelle est la probabilité pour que ce soit un billet gagnant ?
3. Les événements G et O sont-ils indépendants ?

13 On dispose de neuf jetons indiscernables au toucher et portant respectivement les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6,
7, 8, 9. On place ces neufs jetons au hasard sur la grille ci-contre, en plaçant un jeton par case.
1. De combien de façons peut-on placer les neufs jetons sur la grille ?
2. a)Quelle est la probabilité de lire « 421 » sur la deuxième ligne ?
b)Quelle est la probabilité de lire « 421 »sur la deuxième ligne et « 345 » sur la première colonne ?
Maintenant, pour remplir les cases de la première ligne, on tire un jeton parmi les neuf, on écrit le chiffre dans la première case, on remet le jeton et on recommence l'expérience pour chacune des deux autres cases.

3. Quelle est la probabilité d'avoir au moins un « 4 » sur la première ligne ?

14 On suppose qu'un sujet qui vient consulter dans un service hospitalier a comme probabilité 0,30 d'être atteint d'une maladie dont le diagnostic est difficile.
Chaque sujet subi un test et on sait que :
- Si un sujet n'est pas malade, 9 fois sur 10 la réponse au test est négative.
- Si un sujet est malade, 8 fois sur 10 la réponse au test est positive.

1. Quelle est la probabilité pour un sujet d'avoir une réponse positive au test ?
2. Si le résultat est positif au test quelle est la probabilité pour que le sujet soit atteint par cette maladie ?

15 BAC D SESSION 2005

PARTIE A

Soit la fonction f définie sur $[2 ; +\infty[$ par :

$f(x) = \frac{6x^2+22x+20}{x^2+5x+6}$.

1. Calculer f(2) puis $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Démontrer que : $\forall\ x \in [2 ; +\infty[$,

$f(x) = 6 - \frac{8x+16}{x^2+5x+6}$.

3. a) Démontrer que :

$\forall\ x \in [2 ; +\infty[, f'(x) = \frac{8(x+2)^2}{(x^2+5x+6)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

PARTIE B

Une urne contient un jeton marqué 1, deux jetons marqués 2 et trois jetons marqués 3, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On tire simultanément deux jetons de l'urne.
On suppose que les tirages sont équiprobables.
On désigne par X la variable aléatoire égale à la somme des points marqués sue les deux jetons extraits de l'urne.

1. a) Exprimer en fonction de n les valeurs prises par X.

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Soit E(X) l'espérance mathématique de X.

a) Démontrer que : $E(X) = \frac{6n^2+22n+20}{n^2+5n+6}$.

b) Déterminer n pour que E(X) soit égale à 5.

c) Déduire de la partie A que : $4,4 \leq E(X) < 6$.
Donner interprétation de cet encadrement.

16 Une entreprise de location de voiture relève dans sa comptabilité les frais de réparation des pannes d'origine mécanique et ceux de remise en état de la carrosserie.
Elle a observé que, pour une voiture louée une semaine :
−La probabilité de panne mécanique est 0,32
−La probabilité de dégâts à la carrosserie est 0,54
D'autre part la probabilité pour qu'une voiture présente des dégâts à la carrosserie sachant qu'elle est en panne mécanique est : 0,45.

1. Calculer les probabilités suivantes :
a) La probabilité P_1 pour qu'une voiture ait une panne mécanique et présente des dégâts à la carrosserie.
b) La probabilité P_2 pour qu'une voiture ait seulement une panne mécanique.
c) La probabilité P_3 pour qu'une voiture présente seulement des dégâts à la carrosserie.
d) La probabilité P_4 pour qu'une voiture n'ait ni panne mécanique ni dégâts à la carrosserie.
2. Calculer la probabilité pour qu'une voiture louée pendant 8 semaines de suite, n'ait ni panne mécanique, ni dégâts à la carrosserie pendant 4 semaines.
3. Pour une voiture louée une semaine, les frais s'élèvent en moyenne à :
- 30.000 Frs en cas de panne mécanique
- 50.000 Frs en cas de dégâts à la carrosserie

Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le montant moyen en francs CFA des frais hebdomadaires pour une voiture.
a) Déterminer la loi de probabilité de X
b) Calculer l'espérance mathématique de X.
L'interpréter.

17 Une usine fabrique des pièces dont 1,8% sont défectueuses. Le contrôle des pièces

s'effectue selon les probabilités conditionnelles suivantes :
■ Sachant qu'une pièce est bonne, elle est acceptée avec une probabilité de 0,97 ;
■ Sachant qu'une pièce est mauvaise, elle est refusée avec une probabilité de 0,99.
1. Quelle est la probabilité pour qu'une pièce soit défectueuse ?
2. a) Démontrer que la probabilité pour qu'une pièce soit défectueuse et acceptée est 0,00018.
b) Montrer que la probabilité pour qu'une pièce soit bonne et refusée est 0,02946.
c) Calculer la probabilité pour qu'il y ait une erreur dans le contrôle.
3. Si on effectue cinq contrôles de suite, quelle est la probabilité qu'il y ait exactement 2 erreurs de contrôle ?

18 Une banque dispose de guichets automatiques où certains clients peuvent faire des retraits d'argent à l'aide d'une carte magnétique. Chaque carte magnétique a un code secret connu seulement du titulaire de la carte. Ce code secret est une suite de quatre chiffres du système décimal. Exemples de codes : 0375 ; 9918 ; 2400.
Les deux parties A) et B) suivantes sont indépendantes.

PARTIE A
1. Combien de cartes magnétiques la banque peut-elle distribuer à ses clients ?
2. Démontrer que la probabilité pour que le code d'une carte magnétique commence par 0 est égale à $\frac{1}{10}$.
3. Calculer la probabilité pour que le code d'une carte magnétique soit composé des chiffres : 2 ; 4 ; 5 ; 7.

PARTIE B
Monsieur Koné, un client de la banque, titulaire d'une carte magnétique a oublié son code.
Son épouse lui rappelle que celui-ci comporte les chiffres 2 ; 4 ; 5 ; 7. Il décide alors de tenter sa chance au guichet automatique.
Les guichets automatiques sont équipés de mémoires leurs permettant de confisquer une carte après trois essais infructueux successifs.
Monsieur Koné joue la prudence et s'impose deux essais au maximum.
1. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
a) E : « Monsieur Koné réussit à retirer de l'argent au premier essai ».
b) F : « Monsieur Koné échoue au premier essai et réussit au deuxième essai ».
2. Soit G l'événement : « Monsieur Koné retire de l'argent ».
Démontrer que la probabilité de G est égale à $\frac{1}{12}$.
3. De retour à la maison, Monsieur Koné annonce fièrement à son épouse qu'il a pu retirer de l'argent au guichet automatique.
Calculer la probabilité qu'il ait effectué le retrait au premier essai.
4. La banque prélève une taxe pour chaque essai de retrait au guichet automatique. Cette taxe s'élève à 30 francs par essai fructueux et à 60 francs par essai infructueux.
X désigne la variable aléatoire qui détermine la taxe totale à payer sur l'ensemble des essais faits par Monsieur Koné.
a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Démontrer que l'espérance mathématique de X est égale à 115 francs.

19 Pour les questions 1 et 2, on donnera les résultats sous forme de fraction et sous forme décimale approchée par défaut à 10^{-3} près.
Un enfant joue avec 20 billes : 13 rouges et 7 vertes. Il met 10 rouges et 3 vertes dans une boîte cubique et 3 rouges et 4 vertes dans une boîte cylindrique.
1. Dans un premier jeu, il choisit simultanément trois billes au hasard dans la boîte cubique et il regarde combien de billes rouges il a choisies.
On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de billes rouges choisies.
a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Calculer l'espérance mathématique de X.

2. Un deuxième jeu est organisé de telle sorte que l'enfant choisisse d'abord au hasard une des

deux boîtes, puis qu'il prenne alors une bille, toujours au hasard, dans la boîte choisie. On considère les événements
suivants :
C1 : « L'enfant choisit la boîte cubique »,
C2 : « L'enfant choisit la boîte cylindrique »,
R : « L'enfant prend une bille rouge »,
V : « L'enfant prend une bille verte ».
a) Représenter par un arbre pondéré la situation correspondant à ce deuxième jeu.
b) Calculer la probabilité de l'événement R.
c) Sachant que l'enfant a choisi une bille rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boîte cubique ?
3. L'enfant reproduit n fois de suite son deuxième jeu, en remettant à chaque fois la bille tirée à sa place.
a) Exprimer, en fonction de n, la probabilité p_n que l'enfant ait pris au moins une bille rouge au cours de ses n choix.
b) Calculer la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geq 0{,}99$.

20 Une urne contient 9 boules vertes et une boule rouge.
1. Au cours de l'expérience qui consiste à extraire simultanément 3 boules de l'urne, quelle est la probabilité p1 d'obtenir exactement une boule rouge ?
2. L'expérience précédente est répétée cinq fois de suite, avec à chaque fois, remise dans l'urne des 3 boules que l'on a tirées.
Soit X le nombre de boules rouges obtenues au cours de cinq tirages.
a) Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son expérience mathématique.
b) Calculer l'écart-type de X.
3. On extrait une première boule de l'urne et on ne l'y remet que si elle est rouge. On extrait ensuite une deuxième boule de l'urne.
Quelle est la probabilité p2 pour que cette boule soit rouge ?

21 A la gare A, 16 voyageurs ont pris chacun 1 billet dont :
♦ 7 pour la gare B (prix du billet 5000 francs)
♦ 5 pour la gare C (prix du billet 6000 francs)
♦ 4 pour la gare D (prix du billet 7500 francs)
1. On choisit au hasard un de ces voyageurs. Soit X la variable aléatoire associant à chaque voyageur le prix de son billet en franc.
a)Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Calculer l'espérance mathématique de X.
c) Calculer l'écart type de X.
d) Définir la fonction de répartition F de X puis la représenter dans un repère orthogonal
2. On choisit maintenant, au hasard, trois de ces voyageurs.
a)Calculer la probabilité pour que ces trois voyageurs aient trois destinations différentes.
b) Calculer la probabilité pour qu'au moins un des voyageurs ait un billet pour la gare B.
c) Quelle est la probabilité pour que cette direction soit B, sachant que les trois voyageurs ont la même destination ?

22 Un joueur lance simultanément trois pièces de monnaie parfaitement équilibrées. Il gagne 60 francs s'il obtient 3 faces, gagne 30 francs s'il obtient 2 faces exactement, gagne 10 francs s'il obtient une face exactement, mais perd 100 francs s'il n'obtient que des piles.
On désigne par X la variable aléatoire représentant en francs le gain du joueur (un gain est positif ou négatif).
1. Etablir la loi de probabilité de la variable X
2. Déterminer :
a) la probabilité de gagner strictement moins de 30 francs.
b) La probabilité de gagner strictement plus de 10 francs.
3. Calculer l'espérance mathématique de la variable X. Que représente ce résultat pour le joueur ?
4. Un jeu est équitable si l'espérance de X est nulle.
a) Le jeu précédant est-il équitable ? favorable ou défavorable au joueur ?
b) Combien le joueur devrait-il perdre lorsqu'il n'obtient que des piles pour que le jeu soit équitable ?

23 Le carré ABCD représente une cible sur laquelle on lance des fléchettes.
Les longueurs des côtés des 4 carrés sont respectivement de 8 cm, 6cm, 4 cm et 2 cm. On suppose que :
– on ne rate jamais la cible

– la probabilité d'atteindre une zone est proportionnelle à son aire.

1. Calculer les probabilités P1, P2, P3 et P4 d'atteindre les zones C1, C2, C3 et C4 (la zone C2 est en gris)

2. Doumbia lance une fléchette. S'il atteint :

– C1 il gagne 100 F

– C2 il gagne 50 F

– C3 il perd 20F

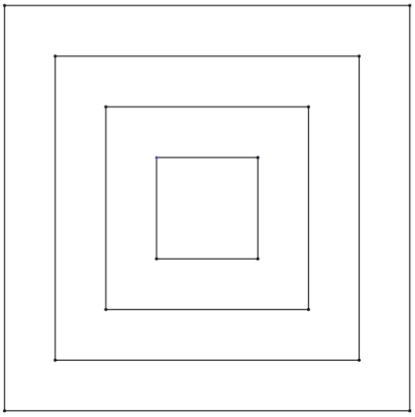
– C4 il perd 30F

On désigne par X le gain algébrique de Doumbia

a) Donner l'univers image de X

b) Donner la loi de probabilité de X

On suppose que Pol lance 16 fléchettes, les unes après les autres, dans les mêmes conditions. Raisonnablement peut-il espérer gagner de l'argent ? le jeu est – il équitable ?



24 On se propose de tester l'efficacité d'une serrure à code et d'un système d'alarme.

Une porte est munie d'un dispositif portant les touches : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et A, B, C, D.

La porte s'ouvre lorsque l'on frappe dans l'ordre trois chiffres et deux lettres qui forment un code. Les chiffres sont nécessairement distincts, les lettres non.

1. Qu'elle est la probabilité pour qu'une personne ouvre la porte au premier essai dans chacun des cas suivants :

a) elle ignore le code ;

b) elle se souvient seulement que les trois chiffres du code sont pairs ;

c) elle se souvient de plus que les deux lettres du code sont identiques.

2. La porte est équipée d'un système d'alarme se déclenchant lorsqu'un des trois chiffres frappés ne figure pas sur la liste des chiffres du code.

Un enfant ignorant le code tente de déclencher l'alarme.

a) Quelle est la probabilité pour qu'il provoque le déclenchement de la sirène à l'issue d'un seul essai ?

Il effectue 8 essais successifs et indépendants.

b) Calculer la probabilité pour qu'il déclenche l'alarme exactement deux fois au cours des 8 essais.

c) Calculer la probabilité pour qu'il déclenche l'alarme au moins 7 fois au cours des 8 essais .

25 Un loueur de bateau possède 5 bateaux qu'il loue à la journée.

Chaque jour il les vérifie et les réparent éventuellement.

Chaque bateau a une chance sur dix d'être immobilisé.

Calculer la probabilité qu'un jour donné, il y ait exactement 2 bateaux immobilisés.

26 Pour une marque de téléphone portable donnée, on s'intéresse à deux options de dernière technologie proposées, le GPS et le WIFI. Sur l'ensemble des téléphones portables, 40% possèdent l'option GPS. Parmi les téléphones avec l'option GPS, 60% ont l'option WIFI.

On choisit au hasard un téléphone portable de cette marque et on suppose que tous les téléphones ont la même probabilité d'être choisis.

On considère les événements suivants :

G : « le téléphone possède l'option GPS ».

W : « le téléphone possède l'option WIFI ».

Dans tout l'exercice, le candidat donnera des valeurs exactes.

1° Calculer les probabilités suivantes : P(G), P(W/G).

2° Déterminer la probabilité de l'événement « le téléphone possède les deux options ».

On suppose que la probabilité de W est : P(W) = 0,7.

3° Démontrer que $P(W/\overline{G}) = \frac{23}{30}$.

4° On choisit un téléphone avec l'option WIFI. Quelle est la probabilité qu'il ne possède pas l'option GPS ?

5° Le coût de revient par téléphone d'une option, pour le fabricant de téléphones, est de 8400F

pour l'option GPS et de 4200F pour l'option WIFI.
On note X la variable aléatoire égale au coût de revient de ces deux options.
a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter le résultat.

27 Le sang humain est classé en 4 groupes distincts : A, B, AB et O.
Indépendamment du groupe, le sang peut posséder le facteur Rhésus. Si le sang d'un individu possède ce facteur il est dit de Rhésus positif (noté Rh+), s'il ne possède pas ce facteur il est dit de Rhésus négatif (noté Rh-).
Sur une population P les groupes sanguins se répartissent d'après le tableau suivant :

A	B	AB	O
40%	10%	5%	45%

Pour chaque groupe la proportion d'individus possédant ou non le facteur Rhésus se répartit d'après le tableau suivant :

Groupe	A	B	AB	O
Rh+	82%	81%	83%	80%
Rh-	18%	19%	17%	20%

Un individu ayant un sang du groupe O et de Rhésus négatif est appelé un donneur universel.
1.a) Quelle est la probabilité pour qu'un individu pris au hasard dans la population P ait un sang du groupe O ?
b) Quelle est la probabilité pour qu'un individu pris au hasard dans la population P soit un donneur universel ?
c) Quelle est la probabilité pour qu'un individu pris au hasard dans la population P ait un sang de Rhésus négatif?
2. On choisit au hasard 5 individus de la population P et on appelle X la variable aléatoire égale au nombre de donneurs universels figurant parmi ces 5 individus.
a) Donner la loi de probabilité de X.
b) Déterminer l'espérance mathématique de X.

28 On considère 2 avions : un biréacteur B et un quadriréacteur Q.
On suppose que tous les réacteurs de ces avions ont la même probabilité p, de tomber en panne et qu'ils sont indépendants les uns des autres.
Soit X et Y les variables aléatoires suivantes :
X est le nombre des réacteurs de B tombant en panne ;
Y est le nombre des réacteurs de Q, tombant en panne.
1° Déterminer les lois de probabilités de X et Y.
2° On estime qu'un avion ne peut achever son vol que si la moitié au moins de ces réacteurs fonctionnent normalement.
Soit P_B et P_Q les probabilités d'un vol réussi respectivement par B et par Q.
a) Calculer P_B et P_Q en fonction de p.
b) Indiquer selon les valeurs de p celui des 2 avions B et Q qui offre la meilleure sécurité.

29 Dans le but de contrôler l'état d'ébriété des conducteurs automobiles, la police procède à un alcootest.
On admet que 2% des personnes contrôlées sont en état d'ébriété.
La police contrôle n personnes. On considère la variable aléatoire X égale au nombre de personnes en état d'ébriété au cours de ce contrôle.
1° Déterminer la probabilité P_n qu'au cours de ce contrôle, il y ait au moins une personne en état d'ébriété.
2° Déterminer le nombre minimal n de personnes à contrôler par la police pour que $P_n \geq 0{,}95$.

30 Avant un appel téléphonique, un abonné s'aperçoit qu'il a oublié les quatre derniers chiffres du numéro à former, mais il sait qu'ils sont distincts et il se rappelle le nombre formé par les autres chiffres.
1° Il compose un de ces numéros au hasard. Qu'elle est la probabilité pour que parmi les quatre derniers chiffres composés :
a) 0 ne figure pas ?
b) 0 figure exactement deux fois ?
c) 0 figure au moins une fois ?
2° L'abonné se souvient maintenant que les

quatre derniers chiffres sont 1,3,8,5 mais sans retrouver leur ordre.
Il compose un de ces numéros au hasard, tous les choix étant équiprobables.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de chiffres qui ne figurent pas à leur place.
a) Donner la loi de probabilité de X.
b) Déterminer l'espérance mathématique de X.

31 Un parking pour voitures comporte 10 places numérotées de 1 à 10 délimitées pour le stationnement des véhicules.
La probabilité d'occupation d'une place quelconque est égale à 70%. On admet de plus que chaque place a la même probabilité d'être occupée.
Un conducteur veut garer au hasard son véhicule sur ce parking.
1° Quelle est la probabilité pour qu'il y ait exactement 3 places libres quand il se présente à l'entrée du parking ?
2° Quelle est la probabilité pour que les places numérotées 3, 6 et 9 soient libres quand le conducteur se présente à l'entrée du parking ?
3° Soit X la variable aléatoire égale au nombre de places libres dont le numéro est un multiple de 3.
a) Donner la loi de probabilité de X.
b) Déterminer l'espérance mathématique de X.
c) Représenter la fonction de répartition de X.

32 On propose le jeu suivant :
Pour une mise de 600 F, un joueur lance un dé cubique bien équilibré possédant :
une face numérotée 1 ; deux faces numérotées 2 ; une face numérotée 4 ; une face numérotée 5 ; une face numérotée 6 .
- Si le dé amène un 6, le joueur reçoit 1800 F.
- Si le dé amène un 5, le joueur reçoit 600 F.
- Si le dé amène un 4, le joueur reçoit 300 F.
- Dans les autres cas, le joueur ne reçoit rien.

1. Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Un joueur se présente : il n'a que 1000F.
Quelle est la probabilité qu'il puisse jouer une deuxième partie ?

33 Un jeu consiste à lancer trois billes numérotées 1, 2, 3 en direction de trois trous notés T_1 , T_2 , T_3 ; chaque bille entre dans un trou et chaque trou peut recevoir jusqu'à trois billes.
1. Calculer la probabilité pour que :
a) chaque trou reçoive une bille ;
b) le trou T_1 reçoive deux billes exactement.
c) chaque trou reçoive au maximum deux billes.
2. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de billes tombées dans le trou T_1.
a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Calculer l'espérance mathématique de X.
3. La partie est gagnée si les trois billes entrent dans des trous différents.
Quelle est la probabilité pour qu'en jouant sept parties, successivement, on gagne exactement trois parties ?

34 BAC D SESSION 2007
Une population d'élèves comportant 40% de bacheliers a subi un test de recrutement en première année d'une grande école.
Ce test a donné les résultats suivants :
- 75% des bacheliers sont admis ;
- 52% des non bacheliers sont admis.

Partie A
On choisit au hasard un élève de la population.
On note :
B l'évènement : « l'élève est bachelier »
T l'évènement : « l'élève est admis au test »
A l'évènement : « l'élève est bachelier et est admis au test».
1. Préciser chacune des probabilités suivantes :
a) La probabilité P(B) de l'évènement B ;
b) La probabilité $P_B(T)$ de T sachant que B est réalisé ;
c) La probabilité $P_B(T)$ de T sachant que B n'est pas réalisé ;
2. Démontrer que la probabilité de l'évènement A est égale à 0,3.
3. Calculer la probabilité de l'évènement T
4. Déduire des questions précédentes que les évènements B et T ne sont pas indépendants.
5. Démontrer que la probabilité pour qu'un élève admis au test soit bachelier est égal à $\frac{25}{51}$.

Partie B
On choisit au hasard 5 élèves de la population

étudiée.
On note X la variable aléatoire égale au nombre d'étudiant bacheliers et admis au test parmi les 5 choisis.
1. Démontrer que la probabilité pour que 3 seulement des 5 élèves soient bacheliers et admis au test est égale à 0.1323.
2. Calculer l'espérance mathématique de X.

35 BAC D REMPLACEMENT 2002

Une société de transport a déposé ses dix cars en vue d'une révision dans un garage.
Devant l'impossibilité de tenir les délais, le mécanicien a procédé à la révision de seulement huit cars choisis au hasard sur les dix.
La société décide tout de même de mettre les dix cars en circulation.
Elle estime que :
- si un car est révisé, la probabilité pour qu'il tombe en panne avant la prochaine révision est égale à 0,1.
- si un car n'est pas révisé, la probabilité pour qu'il tombe en panne avant la prochaine révision est égale à 0,6.

1. On choisit au hasard un car sur les dix.
a) Calculer la probabilité pour qu'il ait été révisé.
b) Calculer la probabilité pour qu'il ait été révisé et qu'il tombe en panne avant la prochaine révision.
c) Calculer la probabilité pour qu'il n'ait pas été révisé et qu'il tombe en panne avant la prochaine révision.
d) En déduire que la probabilité pour qu'il tombe en panne avant la prochaine révision est égale à 0,2.
2. La société apprend que l'un de ses cars est tombé en panne avant la prochaine révision.
Calculer la probabilité pour que ce car ait été révisé.
3. On suppose que l'état de chaque car est indépendant des états des autres cars.
Calculer la probabilité pour que neuf cars au moins sur les dix ne tombent pas en panne avant la prochaine révision.
(On donnera l'arrondi d'ordre 2 du résultat.)

36 *Dans cet exercice, sauf indication contraire, les résultats seront arrondis à* 10^{-5}.
La société ivoirienne de contrôle technique (SICTA) effectue un contrôle technique sur des véhicules dans le mois de septembre dont 1,6% sont en mauvais état.
Ce contrôle a permis d'établir que :
- si un véhicule est en bon état, il est admis à la visite technique avec une probabilité égale à 0,95.
- si un véhicule est en mauvais état, il échoue à la visite technique avec une probabilité égale à 0,97.

On note :
• M l'événement : « le véhicule est en mauvais état » ;
• A l'événement : « le véhicule est admis à la visite technique ».

1. La SICTA contrôle au hasard un véhicule.
a) Quelle est la probabilité qu'il soit en mauvais état ?
b) Démontrer que la probabilité qu'un véhicule soit en mauvais état et soit admis à la visite technique est égale à 0,00048.
c) Calculer la probabilité qu'un véhicule soit en bon état et échoue à la visite technique.
d) Démontrer que la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle est égale à 0,04968.
e. Le véhicule contrôlé est admis à la visite technique.
Calculer la probabilité que ce véhicule soit en mauvais état.

2.La SICTA contrôle 5 véhicules de façon indépendante.
a) Calculer la probabilité qu'il y ait exactement deux erreurs de contrôle parmi ces 5 véhicules.
b) Calculer la probabilité qu'il y ait au moins une erreur de contrôle parmi ces 5 véhicules.
3. Dans cette question, on donnera les valeurs arrondies des résultats à 10^{-1} près .
La SICTA contrôle 100 véhicules de façon

indépendante.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de véhicules sur lesquelles il y a une erreur de contrôle.
a) Calculer l'espérance mathématique de X.
b) Interpréter le résultat précédent.

37 BAC D SESSION 1992

On dispose d'un quadrillage de 3 lignes sur 6 colonnes et de jetons sur lesquels sont inscrites les 18 premières lettres de l'alphabet français.
L'expérience consiste à placer, au hasard un jeton par case de manière à recouvrir exactement les 18 cases formées par ce quadrillage.
1. On désigne par E l'événement : « les lettres a, b et c se trouvent toutes les trois sur la première ligne ».
Démontrer que la probabilité de l'événement E est égale à $\frac{5}{204}$.
2. Sachant que la première case de la première ligne est occupée par un jeton portant la lettre d, quelle est la probabilité pour que les lettres a, b, c, soient encore sur la première ligne ?
(On donnera le résultat sous forme de fraction irréductible).

38 BAC D SESSION 1994

Une loterie nationale propose un jeu appelé le « jeu de trèfle » .
Chaque ticket comporte une grille de 9 cases à gratter.
Dans chaque grille, 3 cases exactement sont marquées d'un trèfle.
Un ticket est gagnant gagnant si les trèfles sont alignés sur une colonne, sur une ligne, ou sur une diagonale. (Voir exemples ci-dessous).

Un ticket perdant

	A	B	C
1	♣		
2	♣	♣	
3			

Un ticket gagnant

	A	B	C
1		♣	
2		♣	
3		♣	

1.a) Justifier que la probabilité pour qu'un joueur achète un ticket gagnant est égale à $\frac{2}{21}$.
b) Quelle est la probabilité de gagner sachant que la case A1 contient un trèfle ?
(A1 est la case correspondant à l'intersection de colonne A et de la ligne 1).
c) Quelle est la probabilité de gagner sachant que la case numérotée A1 ne contient pas de trèfle ?
2. Un joueur achète n tickets ($n \in \mathbb{N}^*$).
a) Calculer la probabilité P_n pour que le joueur ait au moins un ticket gagnant.
b) Pour quelles valeurs de n a-t-on $P_n \geq 0{,}9$?

39 BAC D REMPLACEMENT 1994

Une urne A contient six jetons marqués respectivement 1 ; 1 ; 2 ; 3 ;3 ; 3 .
Une urne B contient quatre jetons marqués respectivement 0 ; 0 ; 0 ; 5 .
On tire un jeton de l'urne A, puis un jeton de l'urne B. On suppose que chaque tirage est équiprobable. Le résultat de ce double tirage détermine une variable aléatoire X dont la valeur est le nombre ayant ayant pour chiffre des dizaines le chiffre marqué sur le jeton tiré de l'urne A et pour chiffre des unités, celui marqué sur le jeton tiré de l'urne B.
1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Représenter graphiquement la fonction de

répartition F de X.
3. Justifier que l'espérance mathématique E(X) de X est égale à $\frac{275}{12}$.

40 BAC D SESSION 1995

Une urne contient 6 boules jaunes, 3 boules vertes et une boule rouge indiscernables au toucher.
On tire au hasard et simultanément 2 boules du sac.
1. Quelle est la probabilité de tirer 2 boules de même couleur ?
2. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de 2 boules, associe +2 si les 2 boules sont de même couleur et -2 si les 2 boules sont de couleurs différentes.
a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Justifier que l'espérance mathématique E(X) de X est égale à -0,4 .
3. On recommence 3 fois la même épreuve, en notant chaque fois la valeur de X obtenue, et en remettant les 2 boules dans le sac après chaque tirage.
Soit Y la variable aléatoire égale à la somme des 3 valeurs de X obtenues.
a) Déterminer la loi de probabilité de Y.
On donnera l'arrondi d'ordre 3 des résultats.
b) Calculer l'espérance mathématique E(Y) de Y. Interpréter le résultat obtenu.

41 BAC D SESSION 1996

Partie A

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 6 boules blanches et 4 boules rouges.
On tire simultanément 2 boules de l'urne.
1. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de 2 boules, associe le nombre de boules rouges tirées.
a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Calculer l'espérance mathématique E(X) de X.

Partie B

Soit un entier naturel n tel que : $2 \leq n \leq 8$.
Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : n boules blanches et (10 – n) boules rouges.
On tire simultanément 2 boules de l'urne.
1. Démontrer que la probabilité P(n) de tirer 2 boules de la même couleur est :
$P(n) = \frac{2n^2 - 20n + 90}{0}$.
2. Déterminer le nombre de nombre n de boules blanches pour que P(n) soit minimum.

42 BAC D SESSION 1993

Le propriétaire d'une loterie met en vente des billets numérotés de 1 à 50.
La règle du jeu est la suivante :
- si le numéro du billet se termine par 0 ou 5, le client gagne 2000 F ;
- si le numéro du billet se termine par 3 ; 6 ou 9, le client gagne 1000 F ;
- dans les autres cas, le client ne gagne rien.

1. Un client choisit un seul billet. On suppose que chaque billet à la même chance d'être tiré.
a) Quelle est la probabilité pour qu'il gagne 1000 F ?
b) Quelle est la probabilité pour qu'il gagne 2000 F ?
c) Soit X la variable aléatoire qui, à chaque billet tiré, associe le gain réalisé.
Calculer l'espérance mathématique E(X) de X.
2. Trouvant qu'il y a trop de gagnants, le propriétaire décide de retirer de la vente un certain nombre n billets terminés 0 ou 5 ($0 \leq n \leq 10$) .
Le client tire alors un billet parmi ceux restants.
Soit X_n la variable aléatoire qui, à chaque billet tiré, associe le gain réalisé.
a) Calculer en fonction de n l'espérance mathématique $E(X_n)$ de X_n.
b) En déduire le nombre minimal de billets à retirer pour que $E(X_n) \leq 500$.

3. Le propriétaire enlève 7 billets terminés par 0 ou 5.
Un client tire simultanément 2 billets parmi ceux restants.
a) Quelle est la probabilité pour qu'il gagne 4000 F ?
b) Quelle est la probabilité pour qu'il ne gagne pas ?

43 BAC D 2E SESSION 2005

Dans un quartier d'affaires, les automobilistes qui désirent se garer doivent utiliser des parkings payants. Le stationnement est interdit en tout autre endroit.
La probabilité pour un automobiliste d'être interpellé par la police municipale pour stationnement interdit et d'avoir alors une amende à payer est égale à 0,2 .
Monsieur Wariko, homme d'affaires ayant constaté que les stationnements payants lui reviennent trop cher, prend le risque de se garer en stationnement interdit.
Il se gare ainsi 20 fois par mois.
(Les résultats seront donnés sous forme d'arrondi d'ordre 2).
1. Démontrer que la probabilité pour que Monsieur Wariko ne paye aucune amende dans le mois est égale à 0,01.
2. Calculer la probabilité pour que Monsieur Wariko paye exactement deux amendes dans le mois.
3. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre d'amendes que Monsieur Wariko doit payer chaque mois.
a) Calculer l'espérance mathématique E(X) de X.
b) En déduire que Monsieur Wariko paye en moyenne 4 amendes par mois.
4. La mairie de la ville s'est rendue compte que le nombre de personnes se garant en stationnement interdit s'est accru, encombrant ainsi les voies. Elle a donc décidé d'augmenter le montant de l'amende de façon à décourager ceux qui se garent stationnement interdit.
Un automobiliste qui se gare 20 fois par mois dans les parkings payants, paye en moyenne 30000 F par mois.
A partir de quel montant d'amende, Monsieur Wariko a-t-il intérêt à utiliser les parkings payants ?

44 Une urne contient 2 jetons blancs et n jetons noirs, indiscernables au toucher,
($n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$).
1. Une partie d'un jeu consiste à tirer 2 jetons de l'urne, simultanément. Pour chaque jeton blanc tiré, le joueur gagne 2 points et pour chaque jeton noir tiré, il perd 1 point.
Mr KONAN participe à une partie.
Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique des points obtenus par Mr KONAN à l'issu d'un tirage.
a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Démontrer que l'espérance mathématique E(X) de X est telle que: $E(X) = \frac{2[-n^2+3n+4]}{(n+2)(n+1)}$.
c) Déterminer la valeur de n pour laquelle le jeu est équitable.
2. Pour la suite, on prendra n = 4 .
Mr KONAN joue 8 parties successives, avec remise dans l'urne des jetons tirés avant chaque nouvelle partie.
On considère que Mr KONAN est gagnant à l'issue de chaque partie, lorsque le gain algébrique des points obtenus est strictement positif et qu'il est perdant dans le cas contraire.
a) Calculer la probabilité pour que Mr KONAN gagne exactement trois parties à l'issue des 8 parties.
b) Calculer la probabilité pour que Mr KONAN gagne exactement sept parties à l'issue des 8 parties.
c) Calculer la probabilité pour que Mr KONAN gagne au moins une parties à l'issue des 8 parties.

12

STATISTIQUES

COURS 234

TRAVAUX PRATIQUES 239

EXERCICES 240

COMMENTAIRES

● **Ce thème** vise à :

- compléter les connaissances en statistique descriptive en abordant l'étude des séries doubles ;
- apprendre à utiliser les tableaux et à interpréter le coefficient de corrélation linéaire.

● **On étudiera** d'abord les tableaux à double entrée en cherchant à donner du sens aux éléments qui les composent.

● **On étudiera** la corrélation existant entre deux variables, puis l'ajustement linéaire et ses applications (extrapolation, interpolation et mise en évidence de lois physiques).

Ce sera l'occasion de réinvestir les techniques vues les années précédentes.

● **On se servira** d'une activité d'introduction pour rappeler le vocabulaire, les calculs de statistique à une variable, et le sens des notions de moyenne et de variance de séries simples.

● **On veillera** à une bonne compréhension des éléments du tableau .
● **L'interprétation** des résultats fera l'objet d'une activité aves les élèves. Dans les rédactions des copies, les élèves devront :
- soit faire apparaître explicitement les formules, puis leur application numérique ;
- soit faire les tableaux de calculs avec les valeurs des séries.
● **Les fonctions** statistiques de la calculatrice serviront à vérifier les résultats. Les énoncés devront indiquer précisément la façon dont on arrondi les résultats.
● **Pour la** lecture des tableaux, on multipliera les questions orales, sans perdre de temps à faire écrire les réponses.
● **On lira** soigneusement les énoncés et on choisira les questions parmi celles qui sont proposés, afin de répondre à des objectifs précis.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES
1.Tableaux statistiques à double entrée. 2.Tableaux de fréquences marginales 3.Nuage de points 4.Point moyen 5.Ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés. 6.Covariance 7.Droite de régression 8.Coefficient de corrélation linéaire	☞Utiliser un tableau à double entrée représentant une série à deux caractères pour reconstituer les séries marginales. ☞Déterminer une équation d'une droite d'ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés. ☞Calculer la covariance. ☞Calculer le coefficient de corrélation linéaire. ☞Interpréter le coefficient de corrélation .

COURS

I. SÉRIES STATISTIQUES DOUBLES

On observe que dans certains cas, il semble exister un lien entre deux caractères d'une population, par exemple entre le poids et la taille d'un nouveau-né, entre le chiffre d'affaire et le montant des charges d'une société, entre la consommation et la vitesse d'une voiture, ….
Il est alors intéressant d'étudier simultanément deux caractères d'une même population.

1. Tableaux à double entrée, nuage de points, point moyen

Tableaux à double entrée

Activité 1
On a relevé le poids X(en kg) et la taille Y(en cm) de 30 élèves d'une classe de TD ; on a obtenu le tableau à double entrée :

y \ x	59	62	65	68	71	74	77
165	1	0	2	2	0	0	0
168	0	2	0	0	0	1	0
171	0	0	1	4	1	0	0
174	0	2	3	0	3	2	0
177	0	0	0	1	1	2	0
180	0	0	0	0	0	0	2

1. Combien d'élèves ont une taille de 171cm et un poids de 68 kg ?
2. Combien d'élèves ont une taille de 171 cm ? Combien ont un poids de 68 kg ?
3.a) Compléter le tableau suivant :

	59	62	65	68	71	74	77	Total
165	1	0	2	2	0	0	0	
168	0	2	0	0	0	1	0	3
171	0	0	1	4	1	0	0	
174	0	2	3	0	3	2	0	
177	0	0	0	1	1	2	0	
180	0	0	0	0	0	0	2	
Total	1		5					30

b) Vérifier qu'on obtient les 2 tableaux suivants appelés séries marginales de X et Y :
Série marginale de X

Poids (X_i)	59	62	65	68	71	74	77
Effectif n_I	1	4	6	7	5	5	2

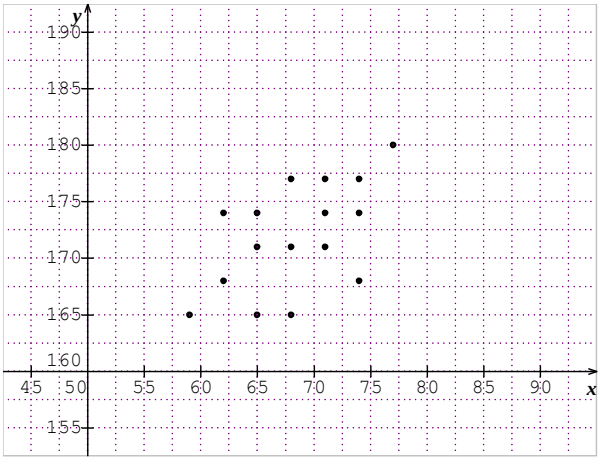
Série marginale de Y

Taille (y_j)	165	168	171	174	177	180
Effectif n_j	5	3	6	10	4	2

Nuage de points

Le plan étant muni d'un repère orthogonal, on appelle nuage de points associé à la série statistique double (X,Y), les points du plan de coordonnées (X_i , Y_j) d'effectif non nul.

Représentation graphique



Point moyen

On appelle point moyen du nuage de points représentant la série statistique double (X ; Y) le point G de coordonnées $(\overline{X}\,;\,\overline{Y})$ où $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ désignent les moyennes respectives des séries marginales.

Exemple : Déterminer le point moyen G des séries marginales X et Y de la série double définie dans l'activité 1.

2. Regroupement en classes

Activité 2

On considère une population de 100 individus. On relève pour chaque individu son poids (en kg) et sa taille (en cm). Soit X le caractère « poids » et Y le caractère « taille ».
Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous.

Y \ X	[40, 45[	[45, 50[	[50, 55[	[55, 60]
[150, 155[	20	9	1	0
[155, 160[	2	18	4	1
[160, 165[	0	5	12	6
[165, 170]	0	1	7	4

1. Déterminer les séries statistiques marginales
2. a) Combien d'individus ont une taille inférieure à 160 cm ?
b) Combien d'individus ont un poids supérieur ou égal à 50 kg ?
c) Combien d'individus ont un poids supérieur ou égal à 50 kg et une taille inférieure à 160 cm?
3. représenter le nuage de points et déterminer les coordonnées du point moyen G

3. Tableau linéaire

Activité 3
Le tableau suivant donne, pour douze dactylographes :
- Le nombre d'années d'expériences (caractère X)
- Le nombre de mots tapés à la machine à écrire en une minute (caractère Y).

Dactylographe	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
Années d'expérience	4	7	8	1	6	3	5	2	9	6	7	10
Nombre de mots tapés	28	45	49	20	44	30	38	22	50	35	42	53

Représenter le nuage de points de la série double (X;Y) et calculer les coordonnées du point moyen G.

II. AJUSTEMENT LINÉAIRE

Faire un ajustement linéaire d'un nuage de points c'est tracer une droite qui passe « le plus près possible » de tous les points du nuage, lorsque la forme du nuage le suggère.
NB : Il existe plusieurs méthodes pour faire cet ajustement linéaire dont **la méthode des moindres carrés**

1. Covariance

Soit une série statistique double (X ,Y) données par le tableau suivant :

x_i	x_1	x_2	...	x_p
y_i	y_1	y_2	...	y_p
n_i	n_1	n_2	...	n_p

$\boldsymbol{N = n_1 + n_2 + \cdots + n_p}$

Définition

On appelle **covariance de (X , Y)** le nombre réel noté $\boldsymbol{cov}$ $(\boldsymbol{X}\,;\boldsymbol{Y})$ et défini par :

$$\boldsymbol{cov}(\boldsymbol{X}\,;\boldsymbol{Y}) = \frac{\boldsymbol{n_1}(\boldsymbol{x_1}-\overline{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{y_1}-\overline{\boldsymbol{Y}}) + \boldsymbol{n_2}(\boldsymbol{x_2}-\overline{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{y_2}-\overline{\boldsymbol{Y}}) + \cdots + \boldsymbol{n_p}(\boldsymbol{x_p}-\overline{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{y_p}-\overline{\boldsymbol{Y}})}{\boldsymbol{N}}$$

Propriété

$$\boldsymbol{cov(X\,;Y)} \quad = \quad \frac{n_1x_1y_1 + n_2x_2y_2 + \cdots + n_px_py_p}{N} - \overline{X} \times \overline{Y}$$

2. Droites de régression par la méthode des moindres carrés

Définition et propriété

♦ On appelle **droite de régression de y en x** par la méthode des moindres carrés, la droite d'équation $y = ax + b$ où $a = \frac{cov(X;Y)}{V(X)}$ et $b = \overline{Y} - a\overline{X}$

♦ On appelle **droite de régression de x en y** par la méthode des moindres carrés, la droite d'équation $x = a'y + b'$ où $a' = \frac{cov(X;Y)}{V(Y)}$ et $b' = \overline{X} - a'\overline{Y}$

Remarque

Les droites de régression passent toujours par le point moyen G $(\overline{X}\,;\overline{Y})$ du nuage.

Exemple

Le tableau suivant donne, pour douze dactylographes :
- le nombre d'années d'expériences (caractère X) ;
- le nombre de mots tapés à la machine à écrire en une minute (caractère Y).

Dactylographe	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
Années d'expérience X	4	7	8	1	6	3	5	2	9	6	7	10
Nombre de mots tapés Y	28	45	49	20	44	30	38	22	50	35	42	53

1. Calculer les moyennes $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ respectivement des variables X et Y.
2. Calculer les variances V(X) et V(Y) et la covariance cov (X, Y) de X et Y.
3. a) Déterminer une équation de la droite (D) de régression de y en x .
b) Déterminer une équation de la droite (D') de régression de x en y .

Solution
Disposition pratique :

													Total
x_i	*4*	*7*	*8*	*1*	*6*	*3*	*5*	*2*	*9*	*6*	*7*	*10*	*68*
y_i	*28*	*45*	*49*	*20*	*44*	*30*	*38*	*22*	*50*	*35*	*42*	*53*	*456*
$x_i\,y_i$	*112*	*315*	*392*	*20*	*264*	*90*	*190*	*44*	*450*	*210*	*294*	*530*	*2911*
x_i^2	*16*	*49*	*64*	*1*	*36*	*9*	*25*	*4*	*81*	*36*	*49*	*100*	*470*
y_i^2	*784*	*2025*	*2401*	*400*	*1936*	*900*	*1444*	*484*	*2500*	*1225*	*1764*	*2809*	*18672*

1. $\overline{X} = \frac{68}{12} \approx 5{,}67$ et $\overline{Y} = \frac{456}{12} = 38$

2. $V(X) = \frac{470}{12} - (5{,}67)^2 \approx 7{,}02$

$V(Y) = \frac{18672}{12} - (38)^2 = 112$

$cov(X;Y) = \frac{2911}{12} - (5{,}67 \times 38) \approx 27{,}12$

3.a) Equation de la droite (D) de régression de y en x :

$a = \frac{cov(X\,;Y)}{V(X)} \approx 3{,}86\ et\ b = \overline{Y} - a\overline{X} \approx 16{,}11$

(D) : $\boldsymbol{y = 3{,}86x + 16{,}11}$

b) Equation de la droite (D') de régression de x en y :

$a' = \frac{cov(X\,;Y)}{V(Y)} \approx 0{,}24\ et\ b' = \overline{X} - a'^{\overline{Y}} \approx -3{,}45$

(D') : $\boldsymbol{x = 0{,}24y - 3{,}45}$ **.**

3. Coefficient de corrélation linéaire

Définition

On appelle **coefficient de corrélation linéaire** le nombre réel r tel que : $\boldsymbol{r = \frac{cov(X\,;Y)}{\sqrt{V(X)\times V(Y)}}}$

Exemple

Le coefficient de corrélation linéaire de l'exemple précédent est : $r = \frac{27{,}12}{\sqrt{7{,}02\times 112}} \approx 0{,}92$

Propriétés

- r, a et a' sont de même signe que $cov(x, y)$
- on admet que $|r| \leq 1$ c'est –à-dire $-1 \leq r \leq 1$.

Remarques

La corrélation linéaire entre les caractères X et Y est d'autant meilleure que $|r|$ ce nombre réel est proche de 1.

On dit qu'il y a une forte corrélation (ou une bonne corrélation) si $|r| \in [0.87\ ;\ 1]$.

Intérêt

Si $|r| \in [0.87\ ;\ 1]$ on peut faire des prévisions c'est-à- dire si on donne x_0, on calcule $y_0 = ax_0 + b$ à partir de l'équation de la droite de régression de y en fonction de x et vice versa.

On fait de même si on connaît l'équation de la droite de régression de x en fonction de y.

- *Si $y = ax + b$ est une équation de la droite de régression de y en fonction de x et $x = a'y + b'$ une équation de la droite de régression de x en fonction de y alors $r^2 = aa'$ et $|r| = \sqrt{aa'}$.*
- *Si $r^2 = 1$ alors $aa' = 1$ donc $a = 1/a'$.*

Les deux droites de régression (D) et (D') sont alors confondues ; on dit que l'ajustement linéaire est parfait.

- *Il ne faut pas confondre une forte corrélation et une liaison de cause à effet.*

TRAVAUX PRATIQUES

Exercice résolu : BAC D SESSION 1999

Un pharmacien observe, durant les dix premiers mois de l'ouverture de son officine, le chiffre d'affaires en millions de francs CFA. Le résultat de l'observation est résumé dans le tableau suivant où X désigne le numéro du mois et Y le chiffre d'affaires correspondant.

X	1	2	3	4	5	6
Y	12	13	15	19	21	22

1. Calculer les moyennes $\overline{X}$et $\overline{Y}$ respectivement des variables X et Y.
2. Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique double ainsi que le point moyen G. (unités 2 cm en abscisses et 1cm en ordonnées).
3. Calculer la variance V(X) de Y et la covariance COV (X, Y) de X et Y. (les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles).
4. Démontrer qu'une équation de la droite de régression (D) de Y en fonction de X est :
   $y = \frac{78}{35}x + 9{,}2$.
5) Tracer la droite (D)
6) En utilisant la droite (D), calculer une estimation du chiffre d'affaires de cette pharmacie à la fin du septième mois.

Solution

Tableau des calculs

x_i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	***21***
y_i	*12*	*13*	*15*	*19*	*21*	*22*	***102***
x_iy_i	*12*	*26*	*45*	*76*	*105*	*132*	***396***
X_i^2	*1*	*4*	*9*	*16*	*25*	*36*	***91***

1) $\overline{X} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$ *et* $\overline{Y} = \frac{102}{6} = 17$.

2) Voir graphique

3) $V(X) = \sum_{i=1}^{6}(x_i)^2 - \left(\overline{X}\right)^2 = \frac{35}{12}$ *et* $Cov(X,Y) = \frac{1}{6}\left(\sum_{i=1}^{6} X_i\, Y_i\right) - \overline{XY} = \frac{13}{2}$.

4) La droite de régression (D) de Y en fonction de X a pour équation : $Y = aX + b$ *avec* $a = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)}$ *et* $b = Y - aX$.

On a: $a = \left(\frac{13}{2}\right)\left(\frac{12}{35}\right) = \frac{78}{35}$ *et* $b = 17 - \left(\frac{78}{35}\right)\left(\frac{7}{2}\right) = 9{,}2$.

Donc une équation de la droite (D) est : $Y = \frac{78}{35}X + 9{,}2$.

5) Voir graphique.

6) Le 7eme mois correspond à x = 7.

Pour $X = 7$, *on a* $Y = \frac{78}{35}(7) + 9{,}2 = 24{,}8$.

A la fin du 7eme mois, le chiffre d'affaire sera estimé à 24 800 000 FCFA.

EXERCICES

1 BAC D SESSION 2000

Une entreprise veut prévoir le nombre d'articles qu'elle aurait en stock en l'an 2004.
L'évolution du stock de ses articles au cours des sept dernières années des années 1990, est donnée par le tableau statistique ci-dessous :

Ordre x_i des années	1	2	3	4	5	6	7
Nombre y_i d'articles en stock	3810	3860	3940	4020	4100	4180	4220

1. A partir de quelle année l'entreprise s'est-elle intéressée à ses stocks ?
2. Représenter graphiquement le nuage de points de la distribution statistique définie par le tableau précédent, dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J). (unités 2 cm en abscisses et 200 articles pour 1 cm en ordonnées).
3. Calculer les coordonnées du point moyen G de ce nuage de points.
(On prendra l'arrondi d'ordre 0 pour l'ordonnée de G).
4. Déterminer une équation de la droite de régression (D) de Y en X par la méthode des moindres carrées.
(On prendra l'arrondi d'ordre 0 pour l'ordonnée de G).
5. Quel serait le nombre d'articles de l'entreprise en stock en 2004 ?
(On donnera l'arrondi d'ordre 1 du résultat).

2 BAC D REMPLACEMENT 2000

Pour préparer la retraite de ses membres, une coopérative de fonctionnaires ivoiriens a planté en 1991 des anacardiers qui sont rentrés en production trois ans plus tard. Le tableau suivant donne l'évolution des productions depuis la première année de récolte.

Ordre X de l'année de production	1	2	3	4	5	6	7
Année de production			1996				
Production Y (en tonne)	118	14	184	247	267	278	255

1. En quelle année cette coopérative a-t-elle obtenu 278 tonnes d'anacarde ?
2. Recopier et compléter le tableau statistique ci-dessus.
3. Représenter dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J), le nuage de points de la série statistique double $(X; Y)$.
(On prendra sur l'axe des abscisses 2 cm pour une unité et sur l'axe des ordonnées 1 cm pour 20 tonnes).
4. Déterminer les coordonnées du point moyen G de la statistique double $(X; Y)$.
5. Justifier que :
a) la variance de X est 4 ;
b) la covariance de X et Y est $\frac{758}{7}$.
6. a) Sachant que la variance de Y est égale à $\frac{170896}{49}$, déterminer l'arrondi d'ordre 2 du coefficient de

corrélation linéaire de la statistique double $(X;Y)$.
b) La corrélation entre les deux variables X et Y est-elle bonne ? Justifier votre réponse.
7.a) Déterminer une équation de la droite de régression (D) de Y en X par la méthode des moindres carrées.
b) Tracer (D).
8. En quelle année la coopérative produira-t-elle 350 tonnes ?

3 BAC D SESSION 2002

Une enquête menée dans une entreprise auprès du personnel, a porté sur le salaire net mensuel par agent Y et le nombre de personnes par famille, à la charge de chaque agent X.
Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Salaire net mensuel y_i (en milliers de francs)	30	15	25	45	60	45	75	
Nombre de personnes de la famille x_i	1	2	2	3	3	4	4	
Salaire net mensuel y_i (en milliers de francs)	80	90	105	150	100	120	105	130
Nombre de personnes de la famille x_i	5	5	5	6	6	6	7	7

Dans les réponses, tous les résultats seront arrondis au centième près.

1. Représenter graphiquement le nuage de points de la série double (X, Y) dans le plan muni du repère orthogonal.
Sur l'axe des abscisses, prendre 1 cm pour 1 personne. Sur l'axe des ordonnées, prendre 1 cm pour 10 000 F.
2. a) Calculer le salaire moyen $\bar{y}$ du personnel de l'entreprise
b) Quel est le nombre moyen de personnes à charge par agent ?
c) Placer le point moyen G du nuage dans le repère.
3. Calculer la covariance cov(X, Y).
4. a) Déterminer une équation de la droite de régression (D) de Y en X par la méthode des moindres carrées.
b) Tracer (D).
5. Selon cet ajustement, si un agent de cette entreprise 80 000 F par mois, à combien peut-on évaluer le nombre de personnes de sa famille ? *(On arrondira le résultat à l'entier).*

4 BAC D 3E SESSION 2004

le tableau statistique suivant indique les variations du chiffre d'affaires Y d'une entreprise commerciale en fonction du budget de publicité de X. (X et Y sont exprimés en millions de francs CFA).

X	18	20	22	25	30	34	35	40	42	44
Y	300	350	340	360	400	380	450	480	490	520

1. Représenter graphiquement le nuage de points dans le plan muni du repère orthogonal.
(1 cm pour 2 millions de francs en abscisses et 2 cm pour 100 millions de francs en ordonnées).
2.a) Déterminer une équation de la droite de régression (D) de Y en X par la méthode des moindres carrées.
(On donnera les coefficients a et b de l'équation sous la forme d'arrondi d'ordre 2).

b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre les variables X et Y.
c) Justifier l'existence d'une forte corrélation linéaire entre X et Y.
d) Calculer, selon l'ajustement ainsi réalisé, une estimation du chiffre d'affaires pour un budget de publicité de 50 millions de francs CFA.

.

5 BAC D 2E SESSION 2006

On a mesuré la hauteur et la circonférence au collet d'un lot de 10 cocotiers âgés de 5 ans.
Les résultats obtenus sont les suivants :

Circonférence x_i en cm	14	15	15	17	18	19	20	20	22	23
Hauteur y_i en cm	300	300	320	330	360	350	360	420	360	420

1. Représenter graphiquement le nuage de points dans le plan muni du repère orthogonal.
(On prendra 2 cm pour 1 unité sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 10 unités sur l'axe des ordonnées).
2. Déterminer les coordonnées $(\overline{X} ; \overline{Y})$ du point moyen G .
3. Placer G.
4. Calculer la variance V(X) de X et la covariance Cov(X ;Y) de X et Y.
5. Démontrer qu'une équation de la droite de régression (D) de Y en X par la méthode des moindres carrées est :
$y = ax + b$ où a et b ont pour arrondis respectifs d'ordre 2 les nombres 11,94 et 133,50 .
6. Tracer (D).
7. Selon l'ajustement ainsi réalisé, estimer la hauteur d'un cocotier dont la circonférence au collet est égale à 16 cm ?.

6 Le tableau suivant donne le poids y en kg d'un nourrisson, x jours après sa naissance.

x_i	5	7	10	14	18	22	26
y_i	3,61	3,70	3,75	3,25	3,90	4,05	4,12

1. Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique double ainsi que le point moyen G. (unités 2 cm en abscisses et 0,5 cm en ordonnées).
2. Déterminer une équation de la droite de régression (D) de Y en X par la méthode des moindres carrées. Représenter cette droite sur le graphique.
3. Donner une estimation du poids du nourrisson 30 jours après sa naissance si la tendance se poursuit.

7 Le tableau suivant donne la tension artérielle moyenne y en fonction de l'âge x d'une population.

Age (X_i)	36	42	48	54	60	66
Tension (Y_i)	11,8	14	12,6	15	15,5	15,1

1. Dans le plan rapporté à un repère orthogonal (O,I, J).
(1 cm pour 5 ans en abscisse et 1 cm pour une unité de tension en ordonnée). Représenter le nuage de points associé à cette série double.
2. Calculer le coefficient de corrélation linéaire. Un ajustement linéaire est –il justifié ?
3. Déterminer une équation de la droite de régression de X en Y. représenter cette droite.
3. Une personne de 70 ans a une tension artérielle de 16,2. Cela paraît –il normal ?

8 Une maison de vente de jouets constate que ses chiffres d'affaires varient en fonction du nombre d'articles vendus. Le tableau ci-dessous donne les statistiques entre 2001 et 2006.

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Nombre d'articles Xi vendus (en milliers)	8	10	12	15	18	24
Chiffres d'affaires Yi (en milliers de francs)	6	7	8,9	12	14,5	17,6

1. Calculer le nombre moyen d'articles vendus et le chiffre d'affaires moyen.
2. Calculer la variance V(X), V(Y) et la covariance Cov(X,Y)
3. Représenter le nuage de points associé à cette série statistique double.
   Un ajustement linéaire est-il possible ?
4. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire.
5. Déterminer une équation de la droite de régression (D) de Y en X.
6. En supposant que la tendance observée se poursuit
a) Quel est le chiffre d'affaires réalisé pour une vente de 30 000 articles
b) Si le chiffre d'affaires est évalué à 25 000 000 F CFA, quel serait le nombre d'articles vendus ?

9 Un grand magasin dispose du tableau statistique suivant :

Années	Nombre d'immatriculations de voitures automobiles (en dizaine de milliers) x_i	Nombre de paquets livrés (en dizaines de milliers) y_i
1996	63	88
1997	65	87
1998	64	96
1999	66	106
2000	69	117
2001	71	118
2002	75	126
2003	76	134
2004	80	130
2005	81	138

1. Déterminer une équation de la droite de régression qui permet d'estimer le nombre des immatriculations à partir du rang de l'année (l'année 1996 aura le rang 1). On donnera les arrondis d'ordre 2 au cours des différents calculs.
2. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre le nombre d'immatriculation de voitures automobiles, et le nombre de paquets livrés par le grand magasin.

3. Donner une équation de la droite de régression qui permet d'estimer le nombre d'immatriculations de voitures automobiles.
4. Utiliser les résultats qui précèdent pour prévoir le nombre des paquets livrés par le magasin en 2012.

10 La consommation Z d'une voiture est donnée en fonction de la vitesse X par le tableau suivant :

X (en km/h)	80	90	100	110	120
Z (en litres/100km)	4	5	6.5	8	10

1. La consommation est-elle proportionnelle à la vitesse ? Justifier votre réponse.
2. Compléter le tableau ci-dessus par la ligne $Y = lnZ$, dont on déterminera les arrondis d'ordre 6.
3. Dans un repère d'origine O (x_0= 70 ; y_0= 1,30) en prenant comme unités 1 cm pour 10 km/h en abscisse et 1 cm pour 0,10 litre en ordonnée, représenter le nuage de 5 points $(X, Y = lnZ)$.
4. Déterminer une équation de la droite de régression de Y en fonction de X. on donnera les arrondis d'ordre 3 des coefficients.
5. Estimer Y pour une vitesse de 140 Km/h.
Estimer la consommation aux 100km pour une vitesse de 140 Km/h à 0,5 litre près comme dans le tableau initialement donné.

RUBRIQUE PROBLÈMES

Problème 1

Partie A

On considère la fonction f définie sur]0,+∞[par : $f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \ln x - \ln(x+1)$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I,J). L'unité graphique est 2 cm.

1. Calculer la limite de f en 0 et en +∞. Interpréter graphiquement les résultats.
2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3. Tracer (C).

Partie B

On note A l'aire en cm² de la partie du plan limitée par (C) , la droite (D) d'équation y = 1 et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e^2 - 1$.

1a) Vérifier que : $\forall x > 0,\ \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$.

b) Calculer $\int_1^{e^2-1} \frac{x}{x+1} dx$.

2. A l'aide d'une intégration par parties, calculer A .

Problème 2 BAC D 2E SESSION 2006

On considère la fonction f définie sur]0,+∞[par : $f(x) = \frac{2(x-1)}{x} - \ln x$ . .

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ;I;J). L'unité graphique est 2 cm.

Partie A

1. Calculer la limite de f en 0 et en +∞.
2. Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers +∞. Interpréter graphiquement le résultat.
3. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
4. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.
5. Démontrer que l'équation x ∈ [2; +∞[, f (x) = 0 admet une solution unique α comprise entre 4,9 et 5.
6. Démontrer que :

$\forall x \in]1;\alpha[, f(x) > 0$

$\forall x \in]0;1[\cup]\alpha;+\infty[,\ f(x) < 0.$

$\forall x \in \{0\ ;\ \alpha\}\quad f(x) = 0.$

7. Exprimer lnα en fonction de α.
8. Tracer (T) et (C).

Partie B

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^{\alpha} \ln x\, dx$.
2. Calculer en fonction de α l'aire en cm² de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x = 1 et x = α

Partie C

Soit g la restriction de f à]0 ;2].

1. Démontrer que g réalise une bijection de]0 ; 2] sur]-∞; $1 - \ln 2$] .
2. Démontrer la bijection réciproque g^{-1} est dérivable en 0 puis calculer $(g^{-1})'(0)$.
3. Soit (C') la courbe représentative de g^{-1} dans le repère (O, I, J).

Construire (C').

Problème 3 BAC D SESSION 2005

Partie A

Soit g la fonction dérivable sur] 0 ; +∞[et définie par : $g(x) = \frac{2}{3}x^3 + 1 - 2\ln x$.

1. a) Démontrer que :$\forall x \in]0 ; +\infty[$,

$g'(x) = \frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x}$.

b) Déterminer le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x .

c) En déduire le sens de variation de g.
2. a) Dresser le tableau de variation de g.
b) Démontrer que :$\forall x \in]0 ; +\infty[$, $g(x) > 0$.

Partie B

Soit f la fonction dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et définie par : $f(x) = \frac{2}{3}x - 1 + \frac{lnx}{x^2}$.
On note (C) la représentation graphique de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 2 cm.
1. a) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
b) En déduire que (C) admet une asymptote verticale.
2. a) Démontrer que la droite (D) d'équation : $y = \frac{2}{3}x - 1$ est une asymptote oblique à (C).
b) Etudier la position de (C) par rapport à (D).
3. a) Démontrer que : $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.
b) Déterminer les variations de f. *(on pourra utiliser la question A.2.b)*
c) Dresser le tableau de variation de f.
4. a) Démontrer que l'équation : $]0 ; +\infty[$, $f(x) = 0$ admet une unique solution α .
b) Démontrer que $1{,}15 < \alpha < 1{,}3$.
c) Construire (D) et (C) dans le même repère. *(On prendra $\alpha = 1{,}2$)*.
5. λ est un nombre réel strictement supérieur à 1. $A(\lambda)$ désigne l'aire de la partie du plan limitée par (D), (C) et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \lambda$.
a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $A(\lambda)$.
b) Déterminer la limite de $A(\lambda)$ lorsque tend λ vers $+\infty$.

Problème 4 BAC D SESSION 2000

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(0) = 0$ et si $x > 0$,
$f(x) = \frac{x^2}{2} + x - 2x\ln x$.
L'objet de ce problème est l'étude de f et le tracé de sa courbe représentative (C) dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x - 1 - 2\ln x$.
1. Calculer les limites respectives de g à droite en 0 et en $+\infty$.
2. On admet que la fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on note g' sa dérivée.
a) Déterminer g' et étudier son signe.
b) En déduire le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
3. Vérifier que : $g(1) = 0$.
4. Démontrer qu'il existe un unique réel α tel que $\alpha \in]3 ; 4[$ et $g(\alpha) = 0$.

Partie B : Détermination d'une valeur approchée de α

On considère la fonction numérique h définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = 2\ln x + 1$.
1. Démontrer que :
$\forall x \in [3; 4], h(x) \in [3; 4]$.
2. On considère la suite U définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 3{,}5 \\ U_{n+1} = h(U_n) \end{cases}$$

a) Démontrer par récurrence que :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in [3 ; 4]$.
b) Calculer l'arrondi d'ordre 3 de U_1.
c) Démontrer par récurrence que la suite (U_n) est croissante.
d) En déduire que la suite (U_n) est convergente. *On admettra que* (U_n) *converge vers la valeur α précédente et on prendra $\alpha \approx 3{,}5$.*

Partie C : Etude de la fonction *f*

1. Démontrer que la fonction f est continue à droite en 0.
2. La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ? Justifier.
3. En donner une interprétation graphique.
4. Calculer la limite de f en $+\infty$.
5. Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$, puis interpréter graphiquement ce résultat.

6. La fonction f est dérivable sur$]0;+\infty[$ et on note f' sa dérivée.
a) Démontrer que : $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = g(x)$.
b) En utilisant les résultats de la partie A, déterminer le signe de f'.
c) Dresser le tableau de variation de f .
7. Tracer la courbe (C).
8. Soit t un nombre réel tel que : 0 < t < 1.
a) En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire A(t) de la partie du plan comprise entre la courbe (C), la droite (OI) et les droites d'équations respectives x = t et x = 1.
b) Calculer la limite de A(t) quant t tend vers 0.

Problème 5 BAC D REMPLACEMENT 2002

f est la fonction définie sur IR\{1} par :
$f(x) = x - \frac{\ln|x-1|}{x-1}$.
On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) l'unité graphiquement est 2 cm.

Partie A

On considère la fonction g définie sur IR\{1} par : g(x) = $(x-1)^2 - 1 + \ln|x-1|$.
1. On suppose que g est dérivable sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$.
Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
2. a) Calculer g(0) et g(2) .
b) Justifier que :
$\forall x \in]-\infty;0[\cup]2;+\infty[, g(x) > 0$;
$\forall x \in]0;1[\cup]1;2[, g(x) < 0$.

Partie B

1.a) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)$.
Interpréter graphiquement ces résultats.
b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) en -∞ et en +∞.
3. On suppose que f est dérivable sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$.
a) Démontrer que :
$\forall x \in \text{IR} \setminus \{1\}, f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$.
b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
4. Démontrer que le point $\Omega(1;1)$ est un centre de (C).
5.a) Démontrer que pour tout nombre réel x différent de 1 :
$\ln|x-1| > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$.
b) En déduire la position de (C) par rapport à (D).
6. Construire (D) et (C).
7. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan délimitée par (C), (D) et les droites d'équations x = 0 et $x = 1-\frac{1}{e}$.

Problème 6 BAC D REMPLACEMENT 2001

L'objet de ce problème est l'étude de la fonction f dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = -\frac{x^3}{6} + x^2 - \frac{x}{2} - x\ln x + \frac{2}{3}, si\ x > 0 \\ f(0) = \frac{2}{3} \end{cases}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) l'unité graphiquement est 2 cm.

Partie A

On considère la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$ *par : g(x)* $= -\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2} - \ln x$.
1. Calculer les limites de g à en 0 et en +∞.
2. On admet que la fonction g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on note g' sa dérivée.
a) Déterminer g' et étudier son signe.
b) En déduire le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
3. Calculer g(1) .
4. Démontrer que :
$\forall x \in]0;1[, g(x) > 0$
$\forall x \in]1;+\infty[, g(x) < 0$.

Partie B

1. Démontrer que la fonction f est continue en 0.

2. a) La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ? Justifier.

En donner une interprétation graphique.

3. Calculer la limite de f en $+\infty$.

4. Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$, puis interpréter graphiquement ce résultat.

5. a) Démontrer que f est une primitive de la fonction g sur $]0\ ;\ +\infty[$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

6.a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α sur $[1; +\infty[$.

b) Justifier que : $3{,}2 < \alpha < 3{,}3$.

7. Tracer la courbe (C).

8. Soit h la restriction de f à $[1; +\infty[$.

a) Démontrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition et l'ensemble d'arrivée.

b) Calculer h(e).

c) Démontrer que h^{-1} est dérivable en $-\frac{e^2}{6} + e^2 - \frac{3e}{2}$ et calculer $(h^{-1})'\left(-\frac{e^2}{6} + e^2 - \frac{3e}{2}\right)$.

d) Tracer la courbe (C') de h^{-1} dans le même repère que (C).

Partie C

Soit t un nombre réel strictement positif inférieur à 1.

1. Calculer I(t) = $\int_t^2 \left(-\frac{x^3}{6} + x^2 - \frac{x}{2} + \frac{2}{3}\right) dx$.

2. A l'aide d'une intégration par parties, calculer J(t) = $\int_t^2 x\ln x\, dx$.

3. En déduire l'aire A(t) en cm^2 de la partie du plan délimitée par (C), (OI) et les droites d'équations respectives $x = t\ et\ x = 2$.

4. Déterminer $\lim\limits_{t\to 0} A(t)$.

Problème 7 BAC D SESSION 1999

Dans ce problème, le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).

Unités graphiques : 1 cm en abscisses et 5 cm en ordonnées.

Partie A

On considère la fonction f de IR vers IR et définie par : $f(x) = \frac{5\ln x}{x^2}$.

On désigne par (C_f) par la courbe représentative de f dans le repère (O,I,J).

1.a) Déterminer D_f .

b) Calculer $f(\sqrt{e})$.

2. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Interpréter graphiquement ces résultats.

3. Déterminer la fonction dérivée f' de f puis étudier le sens de variation de f.

4. Dresser le tableau de variation de f.

Partie B

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$: $g(x) = \frac{5(\ln x)^2}{x^2}$.

On désigne par (C_g) par la courbe représentative de f dans le repère (O,I,J).

1. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

Interpréter graphiquement ces résultats.

2. Démontrer que : $\forall\ x \in]0; +\infty[$, $g'(x) = \frac{10(1-\ln x)\ln x}{x^3}$

3. Etudier le sens de variation de g.

4. Dresser le tableau de variation de g.

Partie C

On considère la fonction h définie sur $]0; +\infty[$: $h(x) = g(x) - f(x)$.

1. Etudier le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.

2. En déduire la position relative des courbes (C_f) et (C_g).

3. Tracer les courbes (C_f) et (C_g) sur une même figure.

Partie D

On considère l'intégrale I_n définie pour tout entier naturel non nul n par : $I_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

2. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier n ≥2 :

$I_n = -\frac{1}{e} + nI_{n-1}$.

3. En déduire que : $I_2 = 2 - \frac{5}{e}$.

4. Interpréter graphiquement $I_1 - I_2$ puis calculer $I_1 - I_2$.

Problème 8 BAC D SESSION 1992

Partie A

Soit g la fonction de IR vers IR et définie par : $g(x) = x^2 - 1 + \ln|x|$.

1. Démontrer que la fonction g est paire et calculer g(1).

2. On admet que g est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation. (On ne calculera les limites)

3. Justifier que :

$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, $g(x) > 0$

$\forall x \in]-1; 0[\cup]0; 1[$, $g(x) < 0$.

Partie B

f est la fonction définie sur IR* par :

$f(x) = x + 1 - \frac{\ln|x|}{x}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ;I;J). L'unité graphique est 2 cm.

1. Calculer la limite de f en 0 et donner une interprétation graphique du résultat.

2.a) Calculer les limites de f en -∞ et en +∞ .

b) Démontrer que la droite (D) d'équation y = x + 1 est asymptote à (C) en -∞ et en +∞ .

c) Démontrer que (C) et (D) se coupent en deux points A et B d'abscisses respectives x_A et x_B telles que : $x_B < 0 < x_A$.

Donner les coordonnées des points A et B et étudier la position de (C) par rapport à (D).

d) Démontrer que le point J est le centre de symétrie de (C).

3.On admet que f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

a) Démontrer que :

$\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4.a) Calculer $f(-e)$ et $f\left(-\frac{1}{e}\right)$ en fonction de e .

En déduire les arrondis d'ordre 1 de $f(-e)$ et $f\left(-\frac{1}{e}\right)$.

b) Construire (D) et (C) .

Partie C

Soit $\mathcal{A}$ l'aire en cm² de la partie du plan limitée par (C) , (D) et les droites d'équations $x = -e$ et $x = -\frac{1}{e}$.

Calculer $\mathcal{A}$.

Problème 9 BAC D SESSION 1993

Partie A

On considère la fonction g dérivable sur $]-1; +\infty[$ et définie par :

$g(x) = (x+1)^2 - \ln(x+1)$.

1. Etudier les variations de g sans calculer les limites .

2. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]-1; +\infty[$.

Partie B

f est la fonction dérivable sur $]-1; +\infty[$ et définie par :

$f(x) = x + \frac{1 + \ln(x+1)}{x+1}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) l'unité graphiquement est 2 cm.

1.a) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

c) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$

est asymptote à (C) en $+\infty$.
d) Etudier la position de (C) par rapport à (D).
2. a) Démontrer que :
$\forall\, x \in]-1;+\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$.
b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3.a) Déterminer le point d'intersection B de (C) et de (D).
b) Tracer (D) et (C).
c) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan délimitée par (C), (D) et les droites d'équations $x = -1 + \frac{1}{e}$ et $x = 0$.
4.a) Démontrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition et l'ensemble d'arrivée.
b) Représenter la courbe (C') de f^{-1} dans le même repère que précédemment.

Problème 10 BAC D REMPLACEMENT 1993

Soit f la fonction de IR vers IR définie par :
$f(x) = \frac{e^x - 3}{e^x - 1}$.
On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) . (Unité : 1 cm) .

1.a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
b) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.
c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.
d) On admet que f est dérivable sur $]0;+\infty[$.
Etudier les variation de f sur $]0;+\infty[$ et dresser son tableau de variation sur $]0;+\infty[$.
2.a) Déterminer les coordonnées du point d'intersection Q de (C) et de l'axe des abscisses.
b) Donner une équation de la tangente (T) à (C) en Q.
c) Tracer la courbe (C') de la restriction de f à $]0;+\infty[$.
3. Démontrer que le point A(0 ; 2) est centre de symétrie de (C).
En déduire un moyen géométrique d'obtenir (C) à partir de (C').
4. Tracer (C).
5.a) Démontrer que $\forall\, x \in$IR*, $f(x) = 3 - \frac{2e^x}{e^x - 1}$.
b) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan délimitée par (C), (OI) et les droites d'équations $x = \ln 2$ et $x = \ln 9$.
6. Soit h la restriction de f à $]0;+\infty[$.
a) Démontrer que h est une bijection de $]0;+\infty[$ sur un intervalle K que l'on déterminera.
b) On note g la bijection réciproque de h.
Tracer la courbe (Γ) de g dans le repère (O, I, J).
c) Déterminer $g(x)$ pour tout x de K.
d) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par (Γ), (OJ) et les droites d'équations $y = \ln 9$ et $y = \ln 2$.
7. Résoudre l'équation : $x \in$IR, $f(x) \geq -1$.

Problème 11 BAC D SESSION 1994

Partie A

On considère la fonction g de IR vers IR et définie par : $g(x) = 1 + x(2\ln|x| + 1)$.
1.a) Déterminer l'ensemble de définition de g.
b) Déterminer les limites de g en $-\infty$, en 0 et en $+\infty$.
2. On admet que g est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.
b) Etudier les variation de g et dresser son tableau de variation .
3.a) Calculer g(-1) .
b) Démontrer que :
$\forall\, x \in]-\infty;-1[$, $g(x) < 0$
$\forall\, x \in]-1;0[\cup]0;+\infty[$, $g(x) > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur IR par :
$\begin{cases} f(x) = x(x\ln|x| + 1) \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$
On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . (Unité : 5 cm) .
1. Démontrer que f est continue en 0.
2. Etudier la dérivabilité de f en 0.

3. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
4. On admet que f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.
a) Démontrer que : $\forall x \in$IR*, $f'(x) = g(x)$.
b) Dresser le tableau de variation de f .
5.a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est tangente à (C) au point O.
b) Démontrer que (D) coupe (C) en deux autres points E et F et calculer leurs coordonnées.
c) Etudier la position de la courbe (C) par rapport à (D).
6. b) Démontrer que (C) coupe (OI) en un point K d'abscisse β telle que : -1,8 < β < -1,7 .
7. Tracer (D) et (C) .

Partie C
1. Soit α un réel appartenant à]0 ;1[.
A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_{\alpha}^{1} x^2 \ln x \, dx$.
2. a) Calculer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie du plan délimitée par (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.
b) Calculer $\lim\limits_{\substack{\alpha \to 0 \\ >0}} \mathcal{A}(\alpha)$.

Problème 12 BAC D REMPLACEMENT 1994

Partie A
Soit f la fonction de IR vers IR et définie par : $f(x) = \frac{(x-2)e^x - x - 2}{e^x - 1}$.
On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .
(Unité : 1 cm) .
1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2. Justifier que : $\forall x \in D_f, f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x - 1}$
.3. Calculer les limites de f à gauche en 0 et à droite en 0 . Interpréter graphiquement les résultats
4. Calculer les limites de f à gauche en -∞ et en +∞.
5. Démontrer que la droite (D_1) d'équation $y = x - 2$ est asymptote à (C) en -∞.
b) Etudier la position de (C) par rapport à (D_1) sur $]-\infty; 0[$.
6.a) Démontrer que la droite (D_2) d'équation y = $x + 2$ est asymptote à (C) en +∞.
b) Etudier la position de (C) par rapport à (D_2) sur $]0; +\infty[$.
7. Démontrer que le point O est un centre de symétrie de (C).
8. On admet que f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.
Dresser le tableau de variation de f .

Partie B
1. Démontrer que l'équation $x \in]-\infty; 0[, f(x) = 0$ admet une solution unique α .
2. a) Calculer les images de ln(11) et de ln(12) par f .
b) En déduire un encadrement de α .
3. Tracer (C).
4. Etant donné un nombre entier naturel n supérieur ou égal à 3, on note A_n l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par (C) , (D_1) et les droites d'équations respectives x = 3 et $x = n$.
a) Calculer A_n.
b) Calculer la limite de A_n lorsque n tend vers +∞.

Problème 13

Partie A
Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty; [$ par : $f(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$.
1. Etudier les variations de f . (On ne calculera les limites)
2. Justifier que : $\forall x \in]0; +\infty[$, $f(x) > 0$

Partie B
g est la fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x + 2\frac{\ln x}{x}$
On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ;I;J). L'unité graphique est 3 cm.
1. Calculer la limite de g en 0 . Interpréter graphiquement ce résultat.

2. Calculer la limite de g en $+\infty$.
3.a) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.
b) Etudier la position de (C) par rapport à (Δ).
4.a) Démontrer que :
$\forall x \in]-\infty; 0[$, g'$(x) = \frac{f(x)}{x^2}$.
b) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
5.a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1 .
b) On admet que (C) est au-dessous de (T) sur $]0; +\infty[$.
Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de (T) avec l'axe des abscisses.
c) En déduire sans calcul le signe de $g\left(\frac{2}{3}\right)$.
d) Démontrer qu'il existe un unique réel α appartenant à $\left[\frac{2}{3}; 1\right]$ tel que $g(\alpha) = 0$.
6. Tracer (Δ), (T) et (C) .
7. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par (C) , (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Problème 14 BAC D SESSION 1996

L'unité étant le centimètre, le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J) tel que :
OI = 4 et OJ = 1.

Partie A

Soit f la fonction de IR vers IR et définie par :
$f(x) = \frac{e^{2x} - 7e^x + 16}{e^x - 3}$.
On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ;I;J).
1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2. Justifier que : $\forall x \in D_f$,
$f(x) = e^x - 4 + \frac{4}{e^x - 3}$.
3. Calculer les limites de f à gauche et à droite en ln3. Interpréter graphiquement les résultats.
4. Calculer la limite de f en -∞ . Interpréter graphiquement le résultat.
5. Calculer les limites de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.
6.a) Démontrer que :
$\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1)(e^x - 5)}{(2 - e^x)^2}$.
b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
7. Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de (T) avec l'asymptote parallèle à l'axe des abscisses.
8. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse ln4 .
9. Tracer (T) et (C).

Partie B

1. Justifier que :
$\forall x \in D_f, f(x) = e^x - \frac{16}{3} + \frac{4e^x}{3(e^x - 3)}$.
2. t , étant un nombre réel strictement négatif, calculer l'aire $A(t)$ de la partie du plan limitée par (C) , la droite d'équation $y = -\frac{16}{3}$ et les droites d'équations respectives x = t et $x = 0$.
3. Calculer $\lim\limits_{t \to -\infty} A(t)$.

Problème 15 BAC D SESSION 2001

On considère la fonction f dérivable sur *IR* et définie par : $f(x) = x(x + 2)e^{x+2}$.
Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O , I , J) ; unité graphique : 1 cm .

1.a) Calculer la limite de f en $-\infty$.
b) Calculer les limites de $f(x)$ et $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.
c) Interpréter graphiquement les résultats des questions a) et b).
2.Démontrer que :
$\forall x \in IR$, $f'(x) = (x^2 + 4x + 2)e^{x+2}$.
3. a) Etudier le sens de variation de f.
b) Dresser le tableau de variation de f.
4.a) Déterminer une équation de chacune des tangente (T) et (T') à (C) aux points d'abscisses respectives -2 et 0.
b) Tracer (T), (T') et (C).

5. Soit la fonction F définie sur IR par
6. λ est un nombre rée strictement inférieur à -2. A_λ désigne l'aire de la partie du plan délimitée par (OI), (C) et les droites d'équations $x = -2$ et $x = \lambda$.
a) A l'aide de deux intégrations par parties, démontrer que : $A_\lambda = 4 - \lambda^2 e^{\lambda+2}$.
b) Déterminer $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} A_\lambda$.
7. a) Déterminer les nombres réels u et v tels que la fonction F définie par
$F(x) = (x^2 + ux + v)e^{x+2}$,soit une primitive de f sur IR .
b) Retrouver le résultat de la question 6.a) .

Problème 16 BAC D SESSION 2002

PARTIE A

On se propose de chercher les fonctions dérivables f de IR vers IR solutions de l'équation différentielle (E) :
$f'(x) + 2f(x) = 2x - 1$.
1. Démontrer que la fonction g définie sur IR par : $g(x) = x - 1$ est solution de (E).
2. Soit (E') l'équation différentielle :
$f'(x) + 2f(x) = 0$.
a) Résoudre (E') .
b) Soit k un nombre réel.
Démontrer que les fonctions f_k définies sur IR par $f_k(x) = ke^{-2x} + x - 1$ sont solutions de (E).
3.a) Soit f une fonction dérivable sur IR.
Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de (E').
4. En déduire les solutions de (E) .

PARTIE B

Soit f la fonction dérivable sur IR et définie par : $f(x) = x - 1 + e^{-2x}$.
Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) ; unité graphique : 3 cm .
1.a) Calculer la limite de f en $-\infty$.
b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$.
c) Interpréter graphiquement les résultats précédents.
2. a) Calculer la limite de f en $+\infty$.
b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.
c) Etudier la position de (C) par rapport à (D).
3.a) Pour tout nombre réel x, calculer $f'(x)$.
b) Etudier le sens de variation de f.
c) Dresser le tableau de variation de f.
4.a) Démontrer que l'équation :
$x \in \left[\frac{\ln 2}{2}; +\infty\right[, f(x) = 0$ admet une solution unique α .
b) Justifier que $0{,}79 < \alpha < 0{,}8$.
c) Tracer (D) et (C).
5. Soit un nombre réel t supérieur à α .
a) Calculer l'aire $A(t)$ de la partie du plan limitée par (C) , (D) et les droites d'équations respectives $x = t$ et $x = \alpha$.
b) Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} A(t)$ en fonction de α .

Problème 17 BAC D SESSION 2003

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]-\infty; 1[$ par : $g(x) = x^2 - 2x + \ln(1 - x)$.
1. Calculer g(0) .
2. On admet que g est dérivable sur $]-\infty; 1[$ et on note g' sa fonction dérivée.
a) Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]-\infty; 1[$.
b) Déterminer suivant les valeurs de x le signe de $g'(x)$.
c) Dresser le tableau de variation de g.
3. En déduire que :
$\forall x \in]-\infty; 0[$, $g(x) > 0$
$\forall x \in]0; 1[$, $g(x) < 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]-\infty; 1[$ par : $f(x) = x + 1 + \frac{\ln(1-x)}{1-x}$.
Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) ; unité graphique : 2 cm .
1. Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x)$.

En déduire que (C) admet une asymptote verticale dont on donnera une équation.

2. Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

3. Démontrer que la droite (D) d'équation y = $x + 1$ est asymptote à (C) en -∞.

4. Etudier la position de (C) par rapport à (D).

5. On admet que f est dérivable sur $]-\infty; 1[$ et on note f' sa fonction dérivée.

a) Démontrer que :

$\forall x \in]-\infty; 1[\ , f'(x) = \frac{g(x)}{(1-x)^2}$.

b) Etudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x puis dresser le tableau de variations de f.

6. Soit h la restriction de f à $]-\infty; 0[$.

a) Démontrer que h réalise une bijection de $]-\infty; 0[$ sur un intervalle K que l'on précisera.

b) Démontrer que l'équation x $\in]-\infty; 1[$ $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α_1 et α_2 telles que $-1{,}37 < \alpha_1 < -1{,}36$ et $0{,}51 < \alpha_2 < 0{,}52$.

c) Vérifier que si un nombre réel α est une solution de l'équation (E) alors:

$\ln(1-\alpha) = \alpha^2 - 1$.

6. On désigne par (C') la représentation graphique de la bijection réciproque h^{-1} dans le repère orthonormé (O,I,J).

Construire (C) et (C'). (On utilisera deux couleurs différentes).

Partie C

1. En remarquant que : $\forall x \in]-\infty; 1[$, $\frac{\ln(1-x)}{1-x} = -\frac{1}{x-1}\ln(1-x)$, déterminer une primitive de la fonction $x \to \frac{\ln(1-x)}{1-x}$ sur $]-\infty; 1[$.

2. Soit $\mathcal{A}$ l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par (C) , (D),(OJ) et la droite d'équation $x = \alpha_1$

a) Calculer $\mathcal{A}$ et exprimer le résultat sans le symbole ln.

b) Donner une valeur approchée de $\mathcal{A}$ à 10^{-1} près.

Problème 18 BAC D 3E SESSION 2004

On considère la fonction f dérivable sur IR définie par : $f(x) = -x^2 + 2x + 2\ln(e^x + 1)$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 2 cm.

Partie A

On considère la fonction g dérivable sur IR définie par : $g(x) = -x + 1 + \frac{e^x}{1+e^x}$.

1.a) Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Démontrer que :

$\forall x \in$IR, $g'(x) = -\frac{e^{2x} + e^x + 1}{(1+e^x)^2}$.

Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

2. a) Démontrer que l'équation $x \in$IR, $g(x) = 0$ admet une solution unique α .

b) Justifier que :

$\forall x \in]-\infty; \alpha[$, $g(x) > 0$

$\forall x \in]\alpha; +\infty[$, $g(x) < 0$.

Partie B

1. Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats.

2.a) Justifier que :

$\forall x \in$IR, $f(x) = -x^2 + 4x + 2\ln(1 + e^{-x})$.

b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

3.a) Démontrer que : $\forall x \in$IR, $f'(x) = 2g(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

4.a) Calculer $f(0)$ et en déduire le signe de $f(\alpha)$

b) Démontrer que :

$f(\alpha) = -\alpha^2 + 4\alpha - 2\ln(\alpha - 1)$.

5. Construire (C) . On prendra α = 1,9.

Problème 19 BAC D 2E SESSION 2005

Partie A

On considère la fonction g dérivable sur IR définie par : $g(x) = x + e^{-2x}$.

1.Calculer $g'(x)$ pour tout x de IR .

2. a) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation. (On ne calculera pas les limites)

b) Justifier que : $\forall x \in$ IR , g$(x) \geq \frac{1+\ln 2}{2}$.

Partie B

On considère la fonction f dérivable sur IR définie par : $f(x) = x^2 - e^{-2x}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 4 cm.

1.a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Interpréter graphiquement les résultats.

2.a) Démontrer que : $\forall x \in$IR, $f'(x) = 2$g(x) .

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Démontrer que l'équation $x \in$ IR, $f(x) = 0$ admet une solution unique α .

d) Justifier que : $0{,}56 < \alpha < 0{,}57$.

3. Déterminer une équation de la tangente (D) à (C) au point d'abscisse $\frac{\ln 2}{2}$.

4. Soit h la fonction définie sur IR par :

$h(x) = f(x) - \frac{(\ln 2)^2}{4} + \frac{1}{2} - (1+\ln 2)\left(x - \frac{\ln 2}{2}\right)$

a) Démontrer que :

$\forall x \in$IR, $h'(x) = 2$g$(x) - (1+\ln 2)$.

b) Déduire de la partie A2.b) le sens de variation de h .

c) Calculer $h\left(\frac{\ln 2}{2}\right)$ puis en déduire que (C) est au-dessus de (D) sur $\left]\frac{\ln 2}{2}; +\infty\right[$ et au-dessous de (D) sur $\left]-\infty; \frac{\ln 2}{2}\right[$.

5. Construire (D) et (C) .

6. Soit t un nombre réel supérieur ou égal à α .

a) Calculer en cm² l'aire $A(t)$ de la partie du plan limitée par (C) , (OI) et les droites d'équations respectives $x = t$ et $x = \alpha$.

b) Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} A(t)$.

Problème 20 BAC D SESSION 2007

L'objet de ce problème est l'étude de chacune des fonctions f, g et h définies ci-dessous.

• f est la fonction dérivable sur $]-\infty; -1[$ et sur $]-1; +\infty[$ et définie par : $\forall x \in$IR$\setminus\{-1\}$, $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$.

• g est la fonction dérivable sur $\left]0; \frac{1}{e}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{e}; +\infty\right[$ et définie par : $\forall x \in \left]0; \frac{1}{e}\right[\cup \left]\frac{1}{e}; +\infty\right[$

$\begin{cases} g(x) = f(\ln x) \text{ si } x \neq \frac{1}{e} \\ g(0) = 1 \end{cases}$.

• h est la fonction dérivable sur IR et définie par : $h(x) = f(e^x)$.

Partie A

1. Démontrer que :

a) $\forall x \in \left]0; \frac{1}{e}\right[\cup \left]\frac{1}{e}; +\infty\right[$, g$(x)$ = 1 - $\frac{4}{1+\ln x}$;

a) $\forall x \in$IR , $h(x)$ = 1 - $\frac{4}{1+e^x}$.

2. a) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ >}} f(x)$.

3. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

Partie B

On désigne par (C_g) la courbe représentative de g dans le plan muni d'un repère orthogonal $\mathcal{R}_1 =$ (O, I, J). L'unité graphique sur (OI) est 1 cm et sur (OJ) est 2 cm.

1. a) Démontrer que g est continue en 0.

b) Démontrer que (C_g) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.

2. a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}$ g(x) puis donner une interprétation graphique du résultat .

b) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{e} \\ <}}$ g(x) et $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{e} \\ >}}$ g(x) puis donner une interprétation graphique du résultat .

3. Démontrer que g est strictement croissante sur $\left]0; \frac{1}{e}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{e}; +\infty\right[$ puis dresser son tableau de variation.

4. Tracer (C_g) et ses asymptotes dans le repère $\mathcal{R}_1$.

Partie C

On note (C_h) la courbe représentative de h dans

le plan muni du repère orthonormé $\mathcal{R}_2 = (O, I, J)$. L'unité graphique est 1 cm .
1. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ puis interpréter graphiquement les résultats.
2. Etudier les variations de h puis dresser son tableau de variation.
3. On note A et B les points d'intersection respectifs de (C_h) avec (OI) et (OJ).
a) Déterminer les coordonnées de A et B.
b) Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à (C_h) en B est $y = x - 1$.
c) Démontrer que B est un centre de symétrie de (C_h) .
4.a) Démontrer que h réalise une bijection de IR sur un intervalle que l'on précisera.
b) Déterminer l'expression explicite de la bijection réciproque h^{-1} de h .
5.a) Tracer (T), (C_h) et ses asymptotes dans le repère $\mathcal{R}_2$.
b) En déduire la représentation graphique (Γ) de la bijection réciproque h^{-1} dans le repère $\mathcal{R}_2$.

Problème 21

Partie A

Soit g la fonction de IR vers IR et définie par :
$g(x) = -e^{2x} + 5e^x - 4$.
1. Résoudre dans IR, l'équation $g(x) = 0$.
2. Justifier que :
$\forall\ x \in]-\infty; 0[\cup]\ln 4; +\infty[,\ g(x) < 0$
$\forall\ x \in]0; \ln 4[,\ g(x) > 0$.

Partie B

Soit f la fonction de IR vers IR et définie par :
$f(x) = -x + \frac{e^x}{2(2-e^x)}$.
On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2. Calculer les limites de f en -∞ et en +∞.
3. Calculer les limites de f à gauche et à droite en ln2. Interpréter graphiquement les résultats
4a) Démontrer que : $\forall x \in D_f\ f'(x) = \frac{g(x)}{(2-e^x)^2}$.
b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
5.a) Démontrer que la droite (D_1) d'équation $y = -x - \frac{1}{2}$ est asymptote à (C) en +∞.
b) Etudier la position de (C) par rapport à (D_1) sur $]\ln 2; +\infty[$.
6.a) Démontrer que la droite (D_2) d'équation $y = -x$ est asymptote à (C) en -∞.
b) Etudier la position de (C) par rapport à (D_2) sur $]-\infty; \ln 2[$.
7. Démontrer que le point A(ln2 : $-\frac{1}{4} - \ln 2$) est centre de symétrie de (C).
8. Tracer (C).

Partie C

Pour tout nombre réel $t < 0$, on note $A(t)$ l'aire de la partie du plan limitée par (C) , (D_2) et les droites d'équations respectives $x = t$ et $x = 0$.
a) Calculer $A(t)$.
b) Calculer la limite de $A(t)$ lorsque t tend vers -∞.

Problème 22

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]-\infty; 0[$ par :
$g(x) = x^2 - 1 + \ln(-x)$.
1. Calculer g(-1).
2. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation. (On ne calculera les limites)
3. Justifier que :
$\forall\ x \in]-\infty; -1[,\ g(x) > 0$
$\forall\ x \in]-1; 0[,\ g(x) < 0$.

Partie B

f est la fonction définie sur $]-\infty; 0[$ par :
$f(x) = x + 2 - \frac{\ln(-x)}{x}$
On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ;I;J). L'unité graphique est 2 cm.
1. Calculer la limite de f en 0 .
2. Calculer la limite de f en -∞.

3.a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote à (C) en -∞.
b) Etudier la position de (C) par rapport à (D).
4.a) Démontrer que : $\forall x \in]-\infty; 0[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
5. Soit h la restriction de f à $]-\infty; -1[$.
a) Démontrer que h réalise une bijection de $]-\infty; -1[$ sur un intervalle K que l'on précisera.
b) Démontrer que l'équation $x \in]-\infty; 0[$ $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α_1 et α_2 telles que $-2{,}37 < \alpha_1 < -2{,}36$ et $-0{,}49 < \alpha_2 < -0{,}48$.
c) Vérifier que : $\ln(\alpha_1) = {\alpha_1}^2 + 2\alpha_1$.
6. On désigne par (C') la représentation graphique de la bijection réciproque h^{-1} dans le repère orthonormé (O,I,J).
Construire (C) et (C').

Partie C
Soit $\mathcal{A}$ l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par (C) , (D),(OJ) et la droite d'équation $x = \alpha_1$
1. Calculer $\mathcal{A}$ et exprimer le résultat sans le symbole ln.
2. Donner une valeur approchée de $\mathcal{A}$ à 10^{-1} près.

Problème 23

On considère la fonction f dérivable sur IR et définie par : $f(x) = 2x + 1 - x e^{x-1}$.
On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ;I;J). L'unité graphique est 2 cm.

Partie A
Soit g la fonction dérivable sur IR et définie par : $g(x) = 2e^{1-x} - x - 1$.
1. Calculer la limite de g en $-\infty$ et en $+\infty$
2. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
3. Calculer g(1) et justifier que :
$\forall x \in]-\infty; 1[$, $g(x) > 0$
$\forall x \in]1; +\infty[$, $g(x) < 0$.

Partie B
1 Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2.a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à (C).
b) Etudier la position de (C) par rapport à (D).
3.a) Démontrer que :
$\forall x \in$ IR, $f'(x) = e^{x-1}g(x)$.
b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
4. Démontrer que l'équation $x \in [1{,}9 ; 2]$, $f(x) = 0$ admet une solution unique α.
5. Tracer (C).

Partie C
1. Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \alpha$.
2. Démontrer que : $\mathcal{A} = 4(\alpha - 1)(\alpha - \frac{1}{\alpha})$.

Problème 24

Partie A
Soit g la fonction définie sur IR par :
$g(x) = 1 + xe^x$.
1. Etudier les variations de g.
2. Démontrer que : $\forall x \in$IR, $g(x) > 0$.

Partie B
f est la fonction définie sur IR* :
$f(x) = e^x + \ln|x|$
On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).
1. Calculer les limites de f en - ∞, en 0 et en +∞.
2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3. Tracer (C).
4. On note A l'aire de domaine limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$.
Calculer A à l'aide d'une intégration par parties.

Problème 25

On considère les fonctions f et g définies sur IR par :
$f(x) = x\ln|x|$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$;
$g(x) = x^2\ln|x|$ si $x \neq 0$ et g(0)=0.
On note (Cf) et (Cg) les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé (O I J).
Unité graphique : 2cm.

Partie A

1. Etudier la parité de f et g.
2. Etudier la continuité de f et g en o.
3. Etudier la dérivabilité de f et g en 0.
   Interpréter graphiquement les résultats.
4. Calculer les limites de f et g en + ∞.
5. Dresser le tableau de variation de f et g.
6. Etudier la position relative de (C_f) et (C_g)
7. Tracer (C_f) et (C_g).

Partie B

Soit t un nombre réel tel que 0 < t < e.
On note A(t) l'aire en cm^2 de la partie du plan limité par (C_f) , (C_g) et droites d'équations respectives x = t et x = e.
1. A l'aire d'une intégration par parties, calculer A(t) .
2. Calculer la limite de A(t) lorsque t tend vers 0.

Problème 26

f est la fonction dérivable sur]-1;0[et sur]0 ; +∞[et définie par : $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^2}$.
On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) l'unité graphiquement est 2 cm.

Partie A

On considère la fonction g dérivable sur]-1 ; +∞ [et définie par :
$g(x) = \frac{x}{1+x} - 2\ln(1+x)$.
1. Calculer les limites de g en -1 et en +∞.
2. Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
3. a) Calculer g(0).
b) Démontrer que l'équation $x \in$ IR, g $(x) = 0$ admet exactement deux solutions dont l'une que l'on notera α.
c) Justifier que α appartient à]-0,8 ; -0,7[.
4. Justifier que :
$\forall x \in]-1; \alpha[\cup]0; +\infty[, g(x) > 0$;
$\forall x \in]\alpha ; 0[, g(x) < 0$.

Partie B

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Démontrer que :
$\forall x \in]-1 ; 0[\cup]0 ; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$
3. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
4. Tracer (C)

Partie C

Soit t un nombre réel tel que t > 1 et on note A(t) l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par (C), l'axe des ordonnées et les droites d'équations x = t et x =1.
1.a) Vérifier que :
$\forall x > 0;$ *on a*: $\frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.
b) Calculer $\int_1^t \frac{dx}{x(1+x)}$.
2.a) Calculer A(t) à l'aide d'une intégration par parties.
b) Calculer la limite de A(t) lorsque t tend vers +∞.

Problème 27

f est la fonction définie sur]0 ; +∞ [par :
$f(x) = (\ln x)^2 - \ln x$.
On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 4 cm.

Partie A

1. Calculer les limites de f en 0 et en + ∞.
2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation
3. Déterminer les points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

Donner les équations des tangentes à(C) en ces points.

4. Tracer(C).

Partie B

Soit g la restriction de f à $[\sqrt{e}; +\infty[$

1. Démontrer que g est une bijection de $[\sqrt{e}; +\infty[$ sur $[-\frac{1}{4}; +\infty[$.
2. Démontrer que la bijection réciproque g^{-1} de g est dérivable en 0 et calculer $(g^{-1})'(0)$.
3. Sur quel intervalle g^{-1} est-elle dérivable ?
4. Tracer la courbe (Γ) de g^{-1}.

Partie C

1. A l'aide d'une intégration par partie, calculer l'intégrale $\int_1^e \ln x\, dx$ puis l'intégrale $\int_1^e (\ln x)^2\, dx$
2. Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$.

Problème 28

Partie A

f est la fonction de IR vers IR définie par :

$f(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I ,J) l'unité graphique est 2 cm .

1.a)Déterminer l'ensemble $D_f$de définition de f.

b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.

2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3. Tracer (C).
4. a)Déterminer les nombres réels a et b tels que $\forall x \in D_f$, $f(x) = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{1-x}$.

b) Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par (Cf), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -\frac{1}{2}$ et $x = \frac{1}{2}$

Partie B

Soit g la fonction de IR vers IR définie par :

$g(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

On note (C') sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) .

1. Etudier la parité de g.
2. Calculer la limite de g en 1.
3. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation
4. Donner une équation de la tangente(T) à (C') au point d'abscisse 0.
5. Soit h la fonction définie sur [0 ; 1[par :

h (x) = g (x) − x .

a)Etudier les variations de h.

b) En déduire le signe de h(x) pour $x \in [0 ; 1[$.

c) En déduire la position de (C') par rapport à (T) sur [0 ; 1[.

6. Tracer (C').
7. a)Démontrer que g est une bijection.

b) Déterminer sa bijection réciproque g^{-1}.

c) Construire la courbe (Γ) de g^{-1}.

8. A l'aide d'une intégration par parties calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par (C'), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$.

Problème 29

Partie A

Soit g la fonction définie sur IR par :

$g(x) = 1+xe^x$.

1. Etudier les variations de g.
2. Démontrer que : $\forall x \in$IR, $g(x) > 0$.

Partie B

f est la fonction définie sur IR* par :

$f(x)= e^x+\ln|x|$.

On note(C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

1. Calculer les limites de f en - ∞, en 0 et en +∞.
2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3. Tracer (C).
4. On note *A* l'aire de la partie délimitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations x=1 et x = e.
Calculer *A* à l'aide d'une intégration par parties.

Problème 30

Partie A

Soit g la fonction dérivable sur [0 ;+∞[et définie par : g(x) = $\frac{2x^2}{1+x^2}$ - ln(1+ x^2).
1. Calculer la limite de g en +∞
2. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
3.a) Démontrer que l'équation :
$x \in]0$;+∞[g(x) = 0 admet une solution unique α.
b) Justifier que $1{,}9 < \alpha < 2$.
c) Justifier que :
$\forall\, x \in]0; \alpha[$, g($x$) > 0
$\forall x \in]\alpha; +\infty[$, g($x$) < 0.

Partie B

On considère la fonction f dérivable sur IR et définie par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} \text{ si } x \neq 0. \end{cases}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
(L'unité graphique est 2 cm).
1. Etudier la parité de f .
2. Démontrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
3. Calculer la limite de f en + ∞ puis en donner une interprétation graphique.
4.a) Démontrer que :
$\forall x \in]0$; +∞[, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
5. a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en O.
6. Soit la fonction u dérivable sur IR et définie par : u(x) = ln(1+x^2) – x^2 .
a) Démontrer que : $\forall x \in$ IR, u(x) ≤ 0.
b) Démontrer que : $\forall x \in$ IR* , $f(x) - x = \frac{u(x)}{x}$.
c) En déduire les positions relatives de (T) et (C).
7. Tracer (T) et (C).

Problème 31

On considère la fonction f dérivable sur]0 ; +∞[et définie par :
$f(x) = 2e^{-2x} \ln(e^x - 1)$.
On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J), d'unités graphiques 2 cm en abscisse et 5 cm en ordonnée.

Partie A

Soit la fonction g dérivable sur]1 ; +∞[et définie par : g(x) = $\frac{x}{x-1}$ -2ln(x –1) .
1. Calculer les limites de g en 1 et en +∞.
2. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
3.a) Démontrer que l'équation :
$x \in]1$;+∞[, g(x) = 0 admet une solution unique α.
b) Justifier que $\sqrt{e}$ +1 < α < e + 1.
Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près
c) Justifier que :
$\forall x \in]1; \alpha[$, g(x) > 0;
$\forall x \in]\alpha; +\infty[$, g($x$) < 0.
4. Soit la fonction φ dérivable sur]1 ; +∞[et définie par : φ (x) = $\frac{\ln(x-1)}{x^2}$.
a) Calculer les limites de φ en 1 et en +∞.
b) Calculer $\varphi'(x)$ et montrer que $\varphi'(x)$ est du signe de g(x).

Partie B

1. Vérifier que : $\forall x \in]0$; +∞[, $f(x) = 2\varphi(e^x)$.

2. En déduire :
a) les limites de f en 0 et en + ∞ .
b) le sens de variation et le tableau de variation de f .
3. Justifier que $f(\ln\alpha) = \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{\alpha}$.
4. Tracer (C).

Partie C

1. Justifier que f est solution de l'équation différentielle : 2y ' + y = 2($\frac{1}{e^x} + \frac{e^x}{e^x-1} - 1$) .
2. On pose h(x) = $\frac{1}{e^x} + \frac{e^x}{e^x-1} - 1$
Déterminer une primitive H de h sur $]0; +\infty[$.
3. Soit λ un réel tel que : λ > ln2.
On désigne par $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = ln2 et $x = \lambda$.
a) calculer $\mathcal{A}(\lambda)$.
b) Calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers +∞.

Problème 32

Partie A

Soit g la fonction définie sur]-1; +∞[par :
g(x) = $e^x - x - 1$.
1. Etudier les variations de g.
2. Déterminer le signe de g(x) pour tout x de]-1; +∞[.

Partie B

f est la fonction définie sur]-1; + ∞[par :
$f(x) = e^{-x} + \ln(x+1)$
On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Unité graphique : 4 cm.
1. Calculer les limites de f en - 1 et en +∞.
2.a) Démontrer que $f'(x)$ a le même signe que g(x) pour tout x de]-1; +∞[.
b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3.a) Démontrer que l'équation :
$x \in]-1; +\infty[, f(x) = 0$ admet une solution unique α et que -1 < α < 0.
b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
4. Tracer (C).

Partie C

Soit K = $\int_{\alpha}^{0} f(x)dx$.
1. Interpréter graphiquement K.
2. Calculer K à l'aide d'une intégration par paries.
(On pourra remarquer que : $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$).
3. Démontrer que : K = $\alpha - 1 + (\alpha+2)e^{-\alpha}$.

Problème 33

Partie A

On donne la fonction P définie sur ℝ par :
P(x) = $e^{2x} - 5e^x + 4$.
1. Résoudre l'équation : $x \in \mathbb{R}$, P(x) = 0.
2. Démontrer que :
$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]\ln 4; +\infty[, P(x) > 0$;
$\forall x \in]0; \ln 4[, P(x) < 0$.

Partie B

Soit la fonction f définie de ℝ vers ℝ par :
$f(x) = x - 1 + \frac{1}{e^x-2}$.
On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).
(Unité : 2 cm).
1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f en -∞ et en +∞, à gauche et à droite en ln2.
3. On admet que f est dérivable en tout point de son ensemble de définition et on note f' sa dérivée.
a) Vérifier que : $\forall x \in]-\infty ; \ln 2[\cup] \ln 2 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{P(x)}{(e^x-2)^2}$.
b) Etudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x .
c) Dresser le tableau de variation de f .
4. Démontrer que la droite (D) d'équation y = x – 1 est une asymptote oblique à (C) en +∞.
5. Etudier la position relative de (C) par rapport à (D) sur] ln2 ; +∞[.

6. Démontrer que :
$\forall x \in]-\infty ; \ln 2[\cup] \ln 2 ; +\infty[$,
$f(x) = x - \frac{3}{2} + \frac{e^x}{2(e^x-2)}$.
7. Démontrer que la droite (Δ) d'équation
y = x – 1 est une asymptote oblique à (C) en -∞.
8. Etudier la position de (C) par rapport à (Δ) sur]-∞ ; ln2 [.
9. Construire (C).

Partie C
Soit λ un nombre réel strictement négatif.
1. Exprimer en fonction de λ l'aire A(λ) en cm^2 de la partie du plan comprise entre la courbe (C), la droite (OJ), la droite (Δ) et droite d'équation x = λ.
2. a) Calculer la limite A de A(λ) lorsque tend vers -∞.
b) Hachurer sur la figure la partie du plan dont l'aire est égale à A.

Problème 34

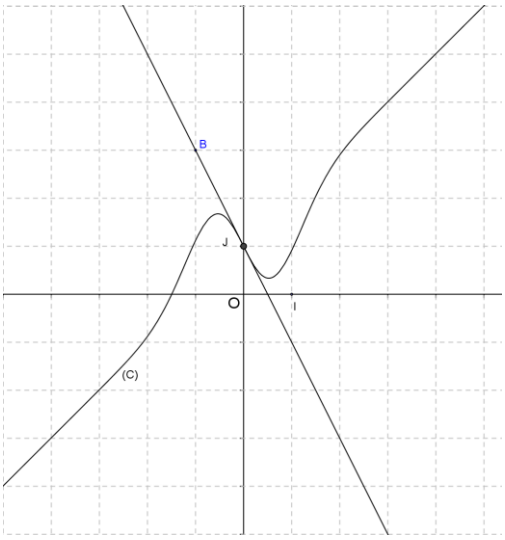
On considère la fonction f de IR vers IR définie par : $f(x) = \ln(e^x + 1)$.
On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J) (unité 2 cm) .

Partie A
1.a) Calculer la limite de f en +∞.
b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2. a) Démontrer que la droite (D) d'équation y = x est une asymptote oblique à (C).
b) Etudier la position de (D) par rapport à (C).
3. Tracer (C).

Partie B
Soit la fonction g définie sur [0 ;1] par :
g(x) = $\frac{x^2}{8} + \frac{x}{2} + ln2 - f(x)$.
1.a) Etudier les variations de g'.
b) En déduire le signe de g'.
c) Etudier les variations de g .
2. Démontrer que :
$\forall x \in [0 ;1]$, $0 \leq g(x) \leq 5.10^{-3}$.
3. On note $\mathcal{A}$ l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par (C), (OI) ,(OJ) et la droite d'équation x = 1.
a) A l'aide de résultats précédents donner un encadrement de $\mathcal{A}$.
b) Donner une valeur approchée de $\mathcal{A}$ à 0,03 près.

Problème 35

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans un repère orthonormé (O,I,J) une courbe (C) et la droite (JB) où B(−1 ; 3).



On désigne par f la fonction dérivable sur IR dont la courbe représentative est (C) .
On suppose, de plus, qu'il existe un réel a tel que pour tout réel x,
$f(x) = x + 1 + axe^{-x^2}$.
1. a. Justifier que la courbe (C) passe par le point J.
b. Déterminer le coefficient directeur de la droite (JB).
c. Démontrer que pour tout réel x,
$f'(x) = 1 - a(2x^2 - 1)e^{-x^2}$.
d. On suppose que (JB) est tangente à la courbe (C) au point J.

Justifier que pour tout réel x,
$f(x) = x + 1 - 3xe^{-x^2}$.
2. Soit g la fonction définie sur IR par :
$g(x) = 1 + 3(2x^2 - 1)e^{-x^2}$.
a. Justifier que, pour tout x de IR :
$g'(x) = 6x(-2x^2 + 3)e^{-x^2}$.
b. Etudier les variations de g.
c. Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
d. On donne $g\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = g\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = 1 + \frac{6}{e\sqrt{e}}$.
Dresser le tableau de variation de g.
e. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0,5; 0,6]$.
f. Justifier que $g(-\alpha) = 0$.
g. Démontrer que :
$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; -\alpha[\cup]\alpha; +\infty[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]-\alpha; \alpha[, g(x) < 0 \end{cases}$.
3. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5.Démontrer qu'il existe un unique réel c de $[-1,5; -1,4]$ tel que $f(c) = 0$.
6. a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$.
b) Etudier la position de (C) par rapport à (D).
7. On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en unités d'aire du domaine délimité par (C), (OI), (OJ) et la droite d'équation $x = c$.
Calculer $\mathcal{A}$.

Problème 36

Partie A

On donne la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x) = e^{2x} - 5e^x + 6$.
1. Résoudre l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 0$.

2. Démontrer que :
$\forall x \in]-\infty; \ln 2[\cup]\ln 3; +\infty[, g(x) > 0$;
$\forall x \in]\ln 2; \ln 3[, \ g(x) < 0$.

Partie B

Soit la fonction f dérivable sur IR et définie par : $f(x) = 5e^{-x} - 3e^{-2x} + x - 3$.
On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J). (Unité : 2 cm).
1. Calculer les limites de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers -∞. Interpréter graphiquement ces résultats.

2. Calculer la limite de f en $+\infty$.

3.a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.
b) Etudier la position relative de (C) par rapport à (D).

4. a) Vérifier que : $\forall x \in IR, f'(x) = e^{-2x}g(x)$
b) Dresser le tableau de variation de f.

5. Démontrer qu'il existe un unique nombre réel α de $[2,6; 2,7]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

6. Construire (C) et (D).

Partie C

Soit t un nombre strictement positif.

1. Exprimer en fonction de t l'aire A(t) en cm^2 de la partie du plan comprise entre la courbe (C), la droite (OJ), la droite (Δ) et droite d'équation $x = t$.

2. a) Calculer la limite de A(t) lorsque tend vers $+\infty$.
b) Déterminer t pour que A(t) = 2.

CORRIGÉS DES EXERCICES

CHAPITRE 1

1 a) $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+x+1}}{x}$;

$x \in Df \Leftrightarrow x \neq 0 \ et\ 4x^2 + x + 1 \geq 0.$

Le discriminant du polynôme $4x^2 + x + 1$ est $\Delta = -15$.

Comme $\Delta < 0$, $4x^2 + x + 1$ a le signe de 4. Donc $\forall x \in$IR, $4x^2 + x + 1 > 0$.

D'où : $Df = \mathbb{R} - \{0\} =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} (-\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}})$

Nous avons: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = 4 \quad car \quad \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0;$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = 4 \quad et \ \lim\limits_{y\to4}\sqrt{y} = 2, donc \ \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = 2.$

Il vient $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2.$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$

Nous avons: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = 4 \quad car \quad \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0;$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = 4 \quad et \ \lim\limits_{y\to4}\sqrt{y} = 2, donc \ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = 2.$

Il vient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2.$

• $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} \frac{1}{x}\sqrt{4x^2 + x + 1} = -\infty \ car \lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} \frac{1}{x} = -\infty \ et \lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} \sqrt{4x^2 + x + 1} = 1$

• $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} \frac{1}{x}\sqrt{4x^2 + x + 1} = -\infty \ car \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} \frac{1}{x} = +\infty \ et \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} \sqrt{4x^2 + x + 1} = 1$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2} + x - 1;$

$x \in Df \Leftrightarrow x^2 + x - 2 \geq 0.$

Le discriminant du polynôme $x^2 + x - 2$ est $\Delta = 9$.

Les zéros de $x^2 + x - 2$ sont -2 et 1.

$x^2 + x - 2$ est positif à l'extérieur des zéros.

D'où : $Df =]-\infty; -2] \cup [1; +\infty[$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{[\sqrt{x^2+x-2}+(x-1)][\sqrt{x^2+x-2}-(x-1)]}{\sqrt{x^2+x-2}-(x-1)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(x^2+x-2)-(x-1)^2}{\sqrt{x^2+x-2}-(x-1)}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3-\frac{3}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-1+\frac{1}{x}}$$

$On\ a$: $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)=1 \quad car \quad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x^2}\right)=0;$

On a : $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)=1\ et\ \lim_{y\to1}\sqrt{y}=1, donc\ \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)=1;$

$On\ a$: $\lim_{x\to-\infty}\left(-1+\frac{1}{x}\right)=-1 \quad car \quad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0;$

Il vient $\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-1+\frac{1}{x}\right)=-2$.

$De\ plus\ \lim_{x\to-\infty}\left(3-\frac{3}{x}\right)=3 \quad car \quad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{x}\right)=0;$

Enfin, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\frac{3}{2}$.

◆ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x-2}+x-1)$

On a $\lim_{x\to+\infty}(x^2+x-2)=\lim_{x\to+\infty}(x^2)=+\infty\ et\ \lim_{y\to+\infty}\sqrt{y}=+\infty,$

$donc\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x-2}=+\infty$.

De plus $\lim_{x\to+\infty}(x-1)=\lim_{x\to+\infty}(x)=+\infty$.

Il vient $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

c)$f(x)$ = $\sqrt{2x^2+1}$ – $x+3$

$x \in Df \iff 2x^2+1 \geq 0$.

On a : $\forall x \in$IR, $4x^2 \geq 0$ et 1 > 0 donc $\forall x \in$IR, $4x^2+1>0$.

D'où : Df= IR.

◆ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{2x^2+1}-x+3)$

On a $\lim_{x\to-\infty}(2x^2+1)=\lim_{x\to-\infty}(2x^2)=+\infty\ et\ \lim_{y\to+\infty}\sqrt{y}=+\infty,$

$donc\ \lim_{x\to-\infty}\sqrt{2x^2+1}=+\infty$.

De plus $\lim_{x\to-\infty}(-x+3)=\lim_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$

Il vient $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

◆ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2(\ 2+\frac{1}{x^2})}-x+3\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}-x+3$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}-1+\frac{1}{x}\right)$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x^2}\right) = 2\ car\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0.$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x^2}\right) = 2et\ \lim\limits_{y\to2}\sqrt{y} = \sqrt{2}\,, donc\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2+\frac{1}{x^2}} = \sqrt{2}.$

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{1}{x}\right) = -1\ car\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Il vient $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}-1+\frac{1}{x}\right) = \sqrt{2}-1.$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}-1+\frac{1}{x}\right) = \sqrt{2}-1$ et $\sqrt{2}-1 > 0$,
donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$

2 $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}-x$

1. $x \in Df \Leftrightarrow x^2+x+1 \geq 0.$

Le discriminant du polynôme x^2+x+1 est $\Delta = -3.$

$\Delta < 0$ *donc le polynôme* x^2+x+1 a le signe de a. Or a = 1 ; a > 0, donc $\forall x \in IR,$ $x^2+x+1 > 0$. Donc $D_f = IR$

$$\forall\, x>0, f(x) = \frac{\left[\sqrt{x^2+x+1}-x\right]\left[\sqrt{x^2+x+1}+x\right]}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$$

$$\forall\, x>0\ f(x) = \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x} = \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$$

Nous avons: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1 \quad car\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0;$

Nous avons: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = 1\ car\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0\ et\ \lim\limits_{X\to1}\sqrt{X} = 1$

$donc\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = 1\,; donc:\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+1 = 2\,;$

On conclut: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}.$

Interprétation : (C_f) admet en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = \frac{1}{2}$

2. $\forall\, x<0, f(x)-\left(-2x\ -\ \frac{1}{2}\right)=\sqrt{x^2+x+1}\ +x-\left(-2x\ -\ \frac{1}{2}\right)=\sqrt{x^2+x+1}\ +x+\frac{1}{2}$

$$\forall\, x<0, f(x)-\left(-2x\ -\ \frac{1}{2}\right)=\frac{\left[\sqrt{x^2+x+1}+(x+\frac{1}{2})\right]\left[\sqrt{x^2+x+1}-(x+\frac{1}{2})\right]}{\sqrt{x^2+x+1}\ -(x+\frac{1}{2})}$$

$$\forall\, x<0, f(x)-\left(-2x\ -\ \frac{1}{2}\right)=\frac{(x^2+x+1)-(x+\frac{1}{2})^2}{\sqrt{x^2+x+1}\ -(x+\frac{1}{2})}=\frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2+x+1}\ -(x+\frac{1}{2})}$$

Nous avons: $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ *et* $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=\ +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}\ =+\infty.$

De plus $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x-\frac{1}{2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}-x=+\infty$ *donc* $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}\ -\left(x+\frac{1}{2}\right)=+\infty.$

On conclut: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(-2x\ -\ \frac{1}{2}\right)\right]=0.$

Donc la droite (D) d'équation $y\ =\ -2x\ -\ \frac{1}{2}$ est asymptote à (C_f) en - ∞.

3. Etudions la position de (C_f) par rapport à (D).

$\forall\, x\ \in IR, f(x)-\left(-2x\ -\ \frac{1}{2}\right)=\sqrt{x^2+x+1}\ +x+\frac{1}{2}$

1er cas : $x\in]-\infty;-\frac{1}{2}]$

$\forall\, x\ \in]-\infty;-\frac{1}{2}], f(x)-\left(-2x\ -\ \frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2+x+1}\ -(x+\frac{1}{2})}$

Le signe de $f(x)-\left(-2x\ -\ \frac{1}{2}\right)$ est celui de $\sqrt{x^2+x+1}\ -\left(x+\frac{1}{2}\right)$

Comme $x\in]-\infty;-\frac{1}{2}]$ alors $-\left(x+\frac{1}{2}\right)\geq 0$, or on sait que $\sqrt{x^2+x+1}\ >0$ donc :

$\forall\, x\ \in]-\infty;-\frac{1}{2}], f(x)-\left(-2x\ -\ \frac{1}{2}\right)>0$. On en déduit que (C_f) est au-dessus de (D) sur $]-\infty;-\frac{1}{2}]$.

2e cas : $x\in[-\frac{1}{2};+\infty[$

$\forall\, x\ \in[-\frac{1}{2};+\infty[, f(x)-\left(-2x\ -\ \frac{1}{2}\right)=\sqrt{x^2+x+1}\ +x+\frac{1}{2}$

Comme $x\in[-\frac{1}{2};+\infty[$ alors $\left(x+\frac{1}{2}\right)\geq 0$, or on sait que $\sqrt{x^2+x+1}\ >0$ donc :

$\forall\, x\ \in[-\frac{1}{2};+\infty[, f(x)-\left(-2x\ -\ \frac{1}{2}\right)>0$. On en déduit que (C_f) est au-dessus de (D) sur $[-\frac{1}{2};+\infty[$.

Conclusion : (C_f) est au-dessus de (D) sur IR.

3 1. $Df=[0.+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{2}{\sqrt{x}}+1}=+\infty\ .$$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$ *car* $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0\ .$

$De\ plus \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}}+1=1 \ \ car \ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}=0 \ .\ Donc \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \ .$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x(2+\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{2+\sqrt{x}}$.

$On\ a: \lim\limits_{x\to+\infty} 2+\sqrt{x}=+\infty \ et \lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x}=1 \ car \ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0$

$donc \ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=0.$

$On\ a\ donc: \ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \ et \ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=0$.

Donc (Cf) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses en $+\infty$.

2. $Dg=R$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})-3x^2}=\lim_{x\to-\infty}|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-3x^2$$

Pour $x<0, |x|=-x$ .Par suite

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-3x\right)$$

$On\ a \ : \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}=0 \ donc \ \lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x^2})=1$

$$On\ a \ : \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=-1 \ car \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1 \\ \lim\limits_{X\to1} -\sqrt{X}=-1 \end{cases}$$

$$On\ a \ : \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-3x=+\infty \ \text{car} \ \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=-1 \ et \ \lim_{x\to-\infty} -3x=+\infty$$

De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty. Par\ produit \ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-3x)=+\infty \text{ , d'après ce qui précède.}$$

$On\ a: \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty \ \text{et} \ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x}=+\infty$

(Cg) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées en $-\infty$

11

PARTIE A

$1a) \ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+2x-2)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=+\infty.$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x on a: g'(x) = $3x^2 + 2$.

Pour tout nombre réel x, g'(x) > 0. g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. g($\mathbb{R}$) = $\mathbb{R}$. Or $0 \in \mathbb{R}$ donc l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

On a : g(0) = -2 et g(1) = 1 d'où g(0) × g(1) < 0. Donc $0 < \alpha < 1$.

b) On a : g(0,77) ≈ - 0,003 et g(0,78) ≈ 0,035 d'où g(0,77) × g(0,8) < 0.

Par conséquent $0{,}77 < \alpha < 0{,}78$.

2. g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On en déduit que :

g($]-\infty; \alpha[$) = $]-\infty; 0[$ et g($]\alpha; +\infty[$) = $]0; +\infty[$.

En conséquence $\forall$ x $\in]-\infty; \alpha[$, g(x) < 0 et $\forall x \in]\alpha; +\infty[$, g(x) > 0.

PARTIE B

1. • $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}) = -\infty$ car $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

• $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

• $\lim_{\substack{x\to0\\<}} f(x) = +\infty$ car $\lim_{\substack{x\to0\\<}} x = 0$, $\lim_{\substack{x\to0\\<}} (-\frac{2}{x}) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x\to0\\<}} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

• $\lim_{\substack{x\to0\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to0\\>}} [x + \frac{1}{x}(-2 + \frac{1}{x})] = +\infty$ car $\lim_{\substack{x\to0\\>}} x = 0$, $\lim_{\substack{x\to0\\>}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{\substack{x\to0\\>}} (-2 + \frac{1}{x}) = +\infty$

2a) $\lim_{x\to-\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to-\infty} (\frac{-2}{x} + \frac{1}{x^2}) = 0$.

De même $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = 0$.

Par conséquent la droite (D) d'équation y = x est asymptote à la courbe (C).

b) $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) - x = \frac{-2x+1}{x^2}$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $x^2 > 0$,donc $f(x) - x$ a le même signe que $-2x + 1$.

Ainsi :

$f(x) - x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

$\forall x \in]-\infty; 0[\cup \left]0; \frac{1}{2}\right[$, $f(x) - x > 0$ et $\forall x \in \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$, $f(x) - x < 0$.

On en déduit que :

(C) est au-dessus de (D) sur $]-\infty; 0[\cup \left]0; \frac{1}{2}\right[$ et est en dessous de (D) sur $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

(C) et (D) se coupent au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

3a) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3} = \frac{x^3+2x-2}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$.

b) L'étude du signe de $\frac{g(x)}{x^3}$ donne :

$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]\alpha; +\infty[$, $f'(x) > 0$ et $\forall x \in]0; \alpha[$, $f'(x) < 0$.

On en déduit :

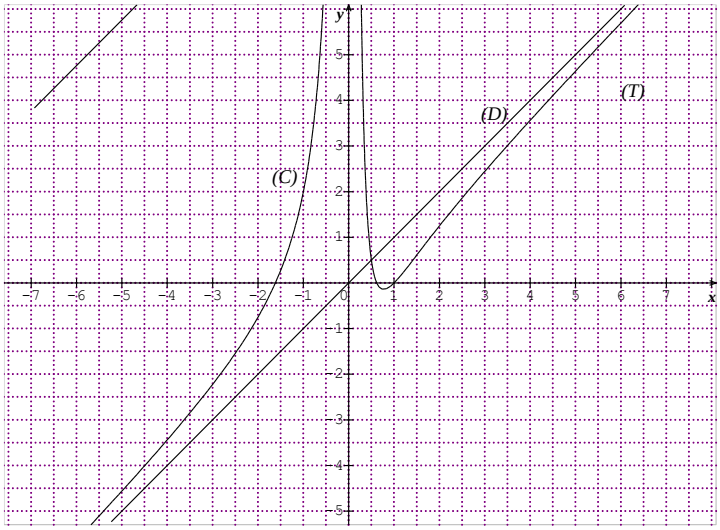
f est strictement croissante sur les intervalles $]-\infty; 0[$ et $[\alpha; +\infty[$;

f est strictement décroissante sur $]0; \alpha]$.

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$	$+$			$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$		$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

c) Une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1 est y = $x - 1$.

4.



12 1.a) g est dérivable sur IR et $\forall x \in IR, g'(x) = 3x^2 - 3$.
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \; ou \; x = 1$.
Donc $\forall x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[, g'(x) > 0$ ainsi g est strictement croissante sur $]-\infty; -1]$.
$\forall x \in]-1; 1[, g'(x) < 0$ ainsi g est strictement décroissante sur $[-1; 1]$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = +\infty$.
b) g est continue et strictement croissante sur $]-\infty; -1]$donc
$g(]-\infty; -1]) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} g(x); g(-1)\right] =]-\infty; -2]$. $0 \notin]-\infty; -2]$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $]-\infty; -1]$.
g est continue et strictement décroissante sur $[-1; 1]$ donc $g([-1; 1]) = [g(1); g(-1)] = [-6; -2]$.
Comme $0 \notin [-6; -2]$, l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution dans$[-1; 1]$.
g est continue et strictement croissante sur $[1; +\infty[$ donc
$g([1; +\infty[) = \left[g(1); \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right[= [-6; +\infty[$. Or $0 \in [-6; +\infty[$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $]-\infty; -1]$. De tout ce qui précède, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans IR.

c) Encadrement de α d'amplitude 0,1
$g(2)\times g(3) < 0$ donc $2 \leq \propto \leq 3$;
$g(2{,}1)\times g(2{,}2) < 0$ donc $2{,}1 \leq \alpha \leq 2{,}2$
d) D'après la question 1)b) on a $g(]-\infty;-1]) =]-\infty;-2]$ et $g([-1;1]) = [-6;-2]$,

Donc $\forall x \in]-\infty;-1], g(x) < 0$ et $\forall x \in [-1;1], g(x) < 0$.

g est strictement croissante sur $[1;+\infty[$ et $g(\propto) = 0$ donc :

- pour $x < \alpha$, on a $g(x) < g(\alpha)$ ainsi $\forall x \in [1;\alpha[, g(x) < 0$

- pour $x > \alpha$, on a $g(x) > g(\alpha)$ ainsi $\forall x \in]\alpha;+\infty[, g(x) > 0$

Finalement $\forall x \in]-\infty;\alpha[, g(x) < 0$ et$\forall x \in]\alpha;+\infty[, g(x) > 0$.

1.a) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

b) On a $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} \frac{x^3+2x^2}{x-1}.\frac{1}{x+1} = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} \frac{x^3+2x^2}{x-1} = -\frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} \frac{1}{x+1} = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} \frac{x^3+2x^2}{x-1}.\frac{1}{x+1} = -\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} \frac{x^3+2x^2}{x-1} = -\frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} \frac{1}{x+1} = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} (x^3+2x^2).\frac{1}{x^2-1} = -\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} (x^3+2x^2) = 3$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} \frac{1}{x^2-1} = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} (x^3+2x^2).\frac{1}{x^2-1} = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} (x^3+2x^2) = 3$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} \frac{1}{x^2-1} = +\infty$.

On a $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à (C_f) et

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x) = +\infty$ donc (C_f) admet la droite d'équation $x = 1$ comme asymptote verticale.

c) f est dérivable sur$]-\infty;-1[$et sur$]1;+\infty[$,

$\forall x \in \text{IR}\backslash\{-1;1\}, f'(x) = \frac{(3x^2+4x)(x^2-1)-2x(x^3+2x^2)}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2-4x}{(x^2-1)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$

d) $\forall x \in \text{IR}\backslash\{-1;1\}, (x^2-1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ a le signe de $xg(x)$.
Etudions le signe de $f'(x)$ dans le tableau suivant.

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
x	-		-	0	+		+		+		
$g(x)$	-		-	0	-		-	0	+		
$f'(x)$	+		+	0	-		-	0	+		

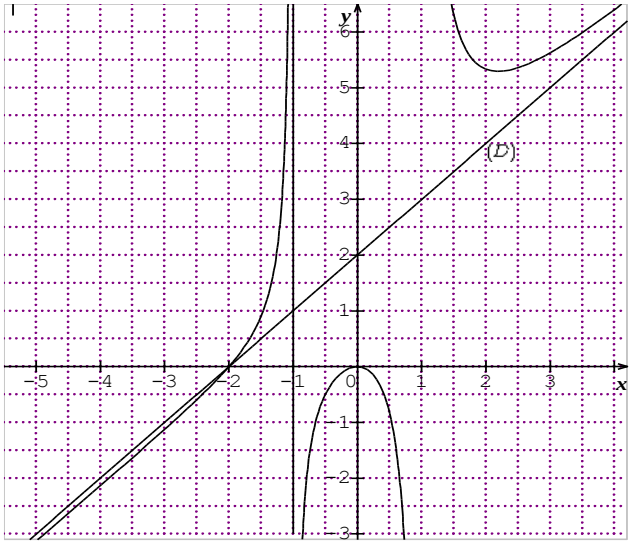
Ainsi :
$\forall x \in]-\infty;-1[\cup]-1;0[\cup]\alpha;+\infty[, f'(x) > 0$ donc $f$est strictement croissante sur$]-\infty;-1[$, sur

$]-1;0]$ et sur $[\alpha;+\infty[$;
$\forall x \in]0;1[\cup]1;\alpha[, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $[0;1[$et sur$]1;\propto]$.

Dressons le tableau de variation de f

x	$-\infty$	-1		0		1		α	$+\infty$
$f'(x)$	+	‖	+	0	-	‖	-	0	+
f(x)	$+\infty$ ↗ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

3.a)La division euclidienne de x^3+2x^2 par x^2-1, donne :
$\forall x \in \text{IR}\setminus\{-1;1\}, f(x) = x+2+\frac{x+2}{x^2-1}$. Ainsi $a=1, b=2, c=1$ et $d=2$.
$b)\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+2)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0.$
$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0.$
Donc (C_f) admet la droite (D)comme asymptote oblique en $-\infty$ et en$+\infty$.
$c)\ \forall x \in \text{IR}\setminus\{-1;1\}, f(x)-(x+2) = \frac{x+2}{x^2-1}$.
L'étude du signe de $f(x)-(x+2)$ donne :
$\forall x \in]-\infty;-2[\cup]-1;0[\cup]0;1[, f(x)-(x+2) < 0$
$\forall x \in]-2;-1[\cup]1;+\infty[, f(x)-(x+2) > 0$
$\forall x \in \{-2;0\}, f(x)-(\text{x}+2) = 0.$
Donc :
(C_f) est au-dessus de (D)sur $]-2;-1[\cup]1;+\infty[$.
(C_f) est au dessous de (D)sur$]-\infty;-2[\cup]-1;0[\cup]0;1[$.
$d)$ Les abscisses de ces points sont solutions de l'équation $x \in D_f, f'(x) = 1$
$f'(x) = 1 \Leftrightarrow x^4-3x^2-4x = x^4-2x^2+1 \Leftrightarrow x^2+4x+1 = 0.$
Les solutions de cette équation sont $-2+\sqrt{3}$ et $-2-\sqrt{3}$. D'où le résultat.
4. Une équation de (T) est : $f'(2)(x-2)+f(2) = -\frac{4}{9}x+\frac{56}{9}$.
5. Les abscisses des points d'intersections de (C_f) avec (OI) sont solutions de l'équation :
$x \in D_f, f(x) = 0$.
$x^3+2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -2$.
Donc $(0;0)$ et $(-2;0)$ sont les coordonnées des points d'intersections.
6. Représentation graphique de f



CHAPITRE 2

1

f) $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^5$; I= IR

$\forall x \in$IR, $f'(x) = 5(2x-3)(x^2-3x+1)^4$.

g) $f(x) = \sqrt{4x-1}$; $I = \left]\frac{1}{4}; +\infty\right[$

$\forall x \in \left]\frac{1}{4}; +\infty\right[, f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x-1}}$.

m) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ I=IR

$\forall x \in$IR, $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

n) $f(x) = x^3(1-x)^2$; I=IR

$\forall x \in$IR, $f'(x) = 3x^2(1-x)^2 + x^3 \times 2(-1)(1-x) = 2x(2x-1)(x-1)$.

q) $f(x) = \frac{x}{2} + 1 - \frac{2}{(x-1)^2}$; $I =]-\infty; 1[$

$\forall x \in]-\infty; 1[, f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{-2\times 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{1}{2} + \frac{4}{(x-1)^3} = \frac{x^3-3x^2+3x+7}{2(x-1)^3}$.

2 1.$f(-1)=0$.

• $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}}(1-x^2)=0$

• $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}}\dfrac{2x+2}{x+2}=0.$

f est continue en -1 car $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)=f(-1).$

2. • $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}}\frac{1-x^2}{x+1}=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}}(1-x)=2$; *f est dérivable à gauche en -1 car* $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$ est finie ; $f'_g(-1)=2.$

• $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}}\frac{\frac{2x+2}{x+2}}{x+1}=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}}\frac{2}{x+2}=2$;; f est dérivable à droite en -1 car $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$ est finie ; $f'_d(-1)=2.$

On en déduit que f est dérivable en -1 car $f'_g(-1)=f'_d(-1)$.

3 $D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$.

Expression de f(x) sans valeur absolue

$\forall x\in\,]-\infty;-1[\,\cup]-1;2]\,, f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x+1}$ *et* $\forall x\in[2;+\infty[\,, f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x+1}$

<u>1.Etude de la continuité en 2</u>

$f(2)=\dfrac{4+|2-2|}{3}=\dfrac{4}{3}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x+2}{x+1}=\frac{4}{3}$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-2}{x+1}=\frac{4}{3}$.

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x)=f(2)=\frac{4}{3}$ *donc f est continue en 2 .*

<u>*2.Etude de la dérivabilité en 2*</u>

• $\forall x\in\,]-\infty;-1[\,\cup]-1;2[\,, \frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{\frac{x^2-x+2}{x+1}-\frac{4}{3}}{x-2}=\frac{3x^2-7x+2}{3(x+1)(x-2)}=\frac{3x-1}{3(x+1)}.$

Or $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x-1}{3(x+1)}=\frac{5}{9}$ *d'ou* $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{5}{9}$ *. On en déduit que f est dérivable*

à *gauche en* 2 *et* $f'_g(2)=\frac{5}{9}$.

• $\forall x\in\,]2;+\infty[\,, \frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{\frac{x^2+x-2}{x+1}-\frac{4}{3}}{x-2}=\frac{3x^2-x-10}{3(x+1)(x-2)}=\frac{3x+5}{3(x+1)}.$

Or $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x+5}{3(x+1)}=\dfrac{11}{9}$ *d'où* $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\dfrac{11}{9}$.

On en déduit que f *est dérivable* à *droite en* 2 *et* $f'_d(2) = \frac{11}{9}$.

Comme $f'_g(2) \neq f'_d(2)$ *alors* f *n'estpas dérivable en* 2.

Interprétation graphique :
Comme $f'_g(2) = \frac{5}{9}$ et $f'_d(2) = \frac{11}{9}$ alors la courbe (C) admet au point d'abscisse 2 deux demi-tangentes de coefficients directeurs $\frac{5}{9}$ et $\frac{11}{9}$.

3.Calcul de limites

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-x+2}{x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} (x) = -\infty.$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-2}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (x) = +\infty.$

- $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} \frac{x^2-x+2}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} \frac{1}{x+1}(x^2-x+2).$

On a $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} (x^2-x+2) = 4$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} \frac{1}{x+1} = -\infty$ donc par produit: $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} f(x) = -\infty.$

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} \frac{x^2-x+2}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} \frac{1}{x+1}(x^2-x+2).$

On a $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} (x^2-x+2) = 4$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} \frac{1}{x+1} = +\infty$ donc par produit: $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x) = +\infty.$

4. Etude des variations de $f$et tableau de variations

- f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty;-1[$ *et* $]-1;2[$.

$\forall x \in]-\infty;-1[\cup]-1;2[,\ f'(x) = \frac{(2x-1)(x+1)-(x^2-x+2)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$.

$\forall x \in]-\infty;-1[\cup]-1;2[,\ (x+1)^2 > 0$ *donc le signe de* $f'(x)$ *est celui de* x^2+2x-3 .
Par suite :
$\forall x \in]-\infty;-3[\cup]1;2[,\quad f'(x) > 0$;
$\forall x \in]-3;-1[\cup]-1;1,\ f'(x) < 0;$
$\forall x \in \{-3;1\}, f'(x) = 0$.

- f est dérivable sur l'intervalle $]2;+\infty[$.

$\forall x \in]2;+\infty[\ , f'(x) = \frac{(2x+1)(x+1)-(x^2+x-2)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}$.

$\forall x \in]2;+\infty[, (x+1)^2 > 0$ *donc le signe de* $f'(x)$ *est celui de* x^2+2x+3.
$\forall x \in]2;+\infty[, f'(x) > 0.$
On en déduit : $\forall x \in]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[,\ f'(x) > 0;$
$\forall x \in]-3;-1[\cup -1;1[\ f'(x) < 0$;
$\forall x \in \{-3;1\}, f'(x) = 0.$

Par conséquent, f est strictement croissante sur $]-\infty;-3]$ et sur $[1;+\infty[$ et strictement décroissante sur$[-3;-1[$ et sur $]-1;1]$.

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	-3	-1	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0 −	||	− 0	+ |	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-7 ↘	|| $+\infty$ ↘	1 ↗		$+\infty$
		$-\infty$				

5.a) $\forall x \in]-\infty;-1[\ \cup]-1;2]$, $f(x)-(x-2)=\frac{x^2-x+2}{x+1}-(x-2)=\frac{4}{x+1}$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4}{x}=0$, alors la droite (D_1) est asymptote à (C) en $-\infty$.

$\forall x \in [2;+\infty[$, $f(x)-x=\frac{x^2+x-2}{x+1}-x=\frac{-2}{x+1}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2}{x}=0$, alors la droite (D_2) est asymptote à (C) en $+\infty$.

b) $\forall x \in]-\infty;-1[\ \cup]-1;2]$, $f(x)-(x-2)=\frac{4}{x+1}$.

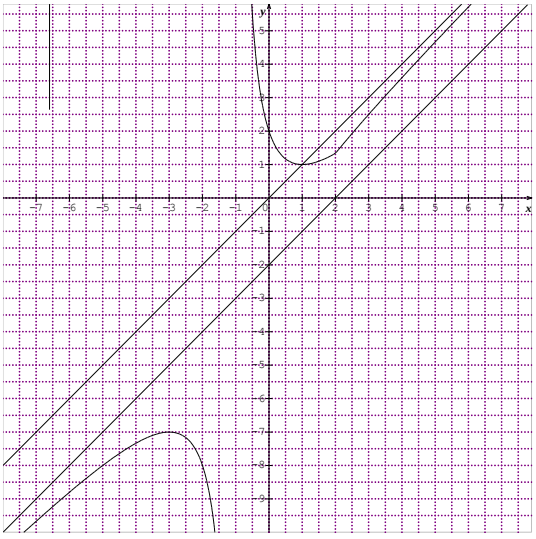
Comme $4>0$ alors le signe de $f(x)-(x-2)$ est celui de $x+1$.

D'où : $\forall x \in]-\infty;-1[$, $f(x)-(x-2)<0$ et $\forall x \in]-1;2]$, $f(x)-(x-2)>0$.

Donc (C) est au-dessous de (D_1) sur $]-\infty;-1[$ et (C)est au-dessus de (D_1) sur $]-1;2]$.

c) $\forall x \in [2;+\infty[$, $f(x)-x=\frac{-2}{x+1}$; $\forall x \in [2;+\infty[$, $x+1>0$ et comme -2< 0 alors $f(x)-x<0$. Par conséquent la courbe (C) est au-dessous de (D_2) sur $[2;+\infty[$.

6. Tracé de (C), (D_1) et (D_2)



8 1. $Df = \{x \in R / x^2 + 3x + 2 \geq 0\}$.

Les zéros de $x^2 + 3x + 2$ sont -2 et -1. Donc d'après la règle des signes, on a :

Df = $]-\infty; -2] \cup [-1; +\infty[$.

2. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1} \frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+3x+2}} = \lim\limits_{x \to -1} \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+2}}\,(x+2)$.

$On\ a\ \lim\limits_{x \to -1} \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+2}} = +\infty\ et\ \lim\limits_{x \to -1}(x+2) = 1\ donc\ \lim\limits_{x \to -1} \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+2}}\,(x+2) = +\infty$

$Ainsi\ \lim\limits_{x \to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = +\infty, donc\ f$ n'est pas dérivable en -1 car

$\lim\limits_{x \to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$ n'est pas finie, mais (C) admet une demie-tangente verticale au point d'abscisse -1.

En procédant comme précédemment, on montre que :

$\lim\limits_{x \to -2} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = -\infty, donc$ f n'est pas dérivable en -2 car

$\lim\limits_{x \to -2} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2}$ n'est pas finie, mais (C) admet une demie-tangente verticale au point d'abscisse -2.

3. $On\ a$: $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 + 3x + 2 = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty\ et \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x} = +\infty, donc\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

$On\ a$: $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + 3x + 2 = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty\ et \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty, donc\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

4. $f\ est\ dérivable\ sur\ ]-\infty; -2[\ et\ sur\ ]-1; +\infty[$

.$\forall x \in\ ]-\infty; -2[\cup]-1; +\infty[, f'(x) = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+2}}$.

$\forall x \in\ ]-\infty; -2[\cup]-1; +\infty[, 2\sqrt{x^2+3x+2} > 0, donc\ le\ signe\ f'(x)\ est\ celui\ de\ 2x+3$.

Donc : $\forall x \in\ ]-\infty; -2[, f'(x) < 0\ et\ \forall x \in\ ]-1; +\infty[, f'(x) > 0$.

On en déduit que f est strictement décroissante sur $]-\infty; -2]\ et\ strictement\ croissante\ sur\ [-1; +\infty[$.

X	-∞	-2	-1	+∞
f '(x)	+	||	||	-
f(x)	+∞ ↘	0 ||	0 ↗	+∞

5. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) + x + \frac{3}{2}\right] = \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+3x+2} + x + \frac{3}{2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2+3x+2}x - x - \frac{3}{2}}$

$On\ a$: $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+3x+2} = +\infty\ et\ \lim\limits_{x \to -\infty}(-x - \frac{3}{2}) = +\infty$

$donc\ \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+3x+2} - x - \frac{3}{2} = +\infty$.

Par suite, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x+\frac{3}{2}\right]=0$.

On montre de façon analogue, que: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x-\frac{3}{2}\right]=0$.

On déduit de ces deux résultats, que (D_1) et (D_2) sont respectivement asymptote à (C) en -∞ et en $+\infty$.

6. $x\leq-2$ ou $x\geq-1\Leftrightarrow-3-x\geq-1$ ou $-3-x\leq-2$.

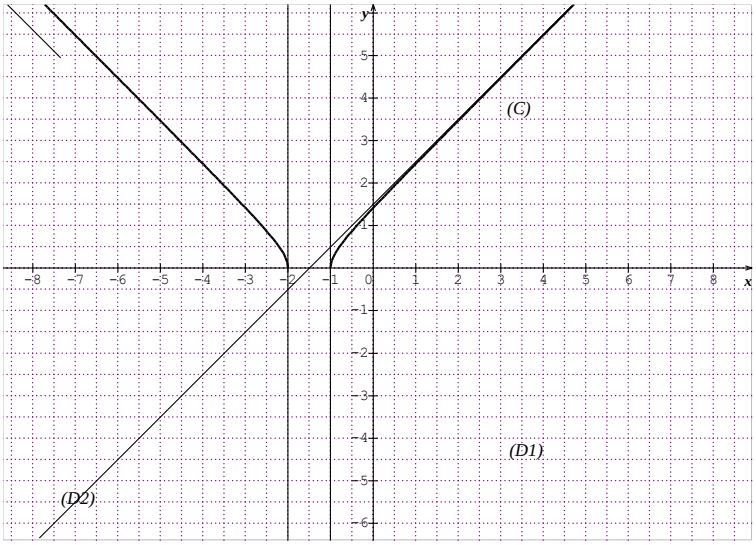
Donc $\forall x\in Df$, $on\ a\ -3-x\in Df$.

$\forall x\in Df,\ f(-3-x)=\sqrt{(-3-x)^2+3(-3-x)+2}=\sqrt{x^2+3x+2}=f(x)$.

Donc la droite d'équation $x=-\frac{3}{2}$ est un axe de symétrie de (C).

7. (T) a pour équation y= $f'(0)$(x-0)+f(0) . (T) a pour équation $y=\frac{3\sqrt{2}}{4}x+\sqrt{2}$

8. Tracé de (D1), (D2) et (C)



Partie B

1. f est continue et strictement croissante sur $[-1;+\infty[$.Comme g est la restriction de f à $[-1;+\infty[$, donc g est aussi continue et strictement croissante sur $[-1;+\infty[$.
De plus $g([-1;+\infty[)=f([-1;+\infty[)=[0;+\infty[$.
Donc g est une bijection de $[-1;+\infty[$ sur $[0;+\infty[$.
2. On a g(0) = f(0) = $\sqrt{2}$ donc l'antécédent de $\sqrt{2}$ par g est 0.
g'(0) = $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ et g'(0) ≠ 0 , donc g^{-1} est dérivable en $\sqrt{2}$. $(g^{-1})'(\sqrt{2})=\frac{1}{g'(0)}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

13

Partie A

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2-\sqrt{x^2-1})$

$On\ a: \lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2) = -\infty$.

$On\ a: \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - 1 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty\ et \lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty\ , donc \lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-1}) = +\infty$.

$Par\ conséquent \lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2\sqrt{x^2-1}) = -\infty$.

$Donc \quad \lim\limits_{x\to+\infty}(2 - x^2\sqrt{x^2-1}) = -\infty.\ D'où \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty.$

2. g est dérivable sur $]1;+\infty[.\ \forall x \in]1;+\infty[, g'(x) = \frac{x(-3x^2+2)}{\sqrt{x^2-1}}$.

$\forall x \in]1;+\infty[, x > 0\ et\ \sqrt{x^2-1} > 0. Donc\ g'(x)\ et\ -3x^2+2$ ont le même signe.
$Donc\ \forall x \in]1;+\infty[, g'(x) < 0.$
Par conséquent g est strictement décroissante sur$]1;+\infty[$.

x	1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	
$g(x)$	‖	2 ↘	$-$

3.a) g est continue et strictement décroissante sur $]1;+\infty[\ ;\ g(]1;+\infty[) =]-\infty;2[\ et\ 0\ \in]-\infty;2[$.
Par conséquent l'équation $x \in]1;+\infty[\ , g(x) = 0$ admet une solution unique α.
$On\ a: \lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} g(x) = 2\ et\ g(2) = 2 - 4\sqrt{3}$.
$g(]1;2[) = \left]2 - 4\sqrt{3}; 2\right[\ et\ 0 \in \left]2 - 4\sqrt{3}; 2\right[.\ Donc\ 1 < \alpha < 2.$
$b)\ On\ a\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} g(x) = 2\ et\ g(1{,}1) \approx -0{,}3$. On a $2 > 0\ et\ -0{,}3 < 0. Donc\ 1 < \alpha < 1{,}1.$
Une valeur approchée de α est *1,1*.

4. g est strictement décroissante sur$]1;+\infty[$ *et* $g(\alpha) = 0$. Par conséquent *:*
$si\ 1 < x < \alpha\ alors\ g(x) > g(\alpha)\ ;$

$$g(x) > 0.$$

$si\ x > \alpha\ alors\ g(x) < g(\alpha)\ ;$

$$g(x) < 0.$$

<u>*Conclusion*</u> $\forall x \in]1;\alpha[, g(x) > 0\ et\ \forall x \in]\alpha;+\infty[, g(x) < 0.$

<u>Partie B</u>

1. $D_f =]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$. D_f est symétrique par rapport à 0.
$\forall x \in, f(-x) = \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = -\left(-\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right) = -f(x)$. Donc f est une fonction impaire.

$2.a)\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x})$

$On\ a\ \lim\limits_{x\to+\infty}(-\frac{x}{2}) = -\infty.$

$On\ a\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\frac{1}{x^2}) = 1\ car\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} = 0$

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\frac{1}{x^2}) = 1\\ \lim\limits_{y\to1}\sqrt{y} = 1\end{cases}$ *donc par composition* $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = 1.$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 1.$

De $\lim\limits_{x\to+\infty}(-\frac{x}{2}) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 1$ *, on en tire* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \left(-\frac{x}{2}+1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-1) = 0\ car\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 1.$
Donc la droite (D) est asymptote à (C) en $+\infty$.

c) $\forall x\in\ ]1;+\infty[, f(x) - \left(-\frac{x}{2}+1\right) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - 1 = \frac{\sqrt{x^2-1}-x}{x}.$
$\forall x\in\ ]1;+\infty[, x>0,$ *donc* $f(x) - \left(-\frac{x}{2}+1\right)$ a le même signe que $\sqrt{x^2-1}-x.$
$\forall x\in\ ]1;+\infty[,\ \sqrt{x^2-1}>0\ et -\ x<0.$
On a *:* $\forall x\in\ ]1;+\infty[, \sqrt{x^2-1}-x = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}.$
$\forall x\in\ ]1;+\infty[,\ \sqrt{x^2-1}>0\ et\ x>0.$
Donc $\forall x\in\ ]1;+\infty[, \sqrt{x^2-1}+x>0.$ *Or* $-1<0$ *donc* $\forall x\in\ ]1;+\infty[, \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}<0.$
D'où $\forall x\in\ ]1;+\infty[, f(x) - \left(-\frac{x}{2}+1\right)<0.$
Par conséquent (C) est au-dessous de (D) sur $]1;+\infty[$.

$3.\ f(1) = -\frac{1}{2}.$

$\lim\limits_{x\to1_>}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1_>}(-\frac{1}{2}+\frac{x+1}{x\sqrt{x^2-1}}) = \lim\limits_{x\to1_>}-\frac{1}{2}+(\frac{x+1}{x})\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$On\ a\ \lim\limits_{x\to1_>}\frac{x+1}{x} = 2\ et\ \lim\limits_{x\to1_>}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$
$Donc: \lim\limits_{x\to1_>}(\frac{x+1}{x})\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty. D'où\ \lim\limits_{x\to1_>}-\frac{1}{2}+(\frac{x+1}{x})\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$
Par conséquent, $\lim\limits_{x\to1_>}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ n'est pas un nombre réel. Donc f n'est pas dérivable en 1.

Donc (C) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 1.

4.a) *f* est dérivable sur $]1;+\infty[$.

$\forall x \in]1;+\infty[, f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right)x-\sqrt{x^2-1}}{x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \frac{2-x^2\sqrt{x^2-1}}{2x^2\sqrt{x^2-1}} = \frac{g(x)}{2x^2\sqrt{x^2-1}}$.

b) $\forall x \in]1;+\infty[, 2x^2\sqrt{x^2-1} > 0$. Donc $f'(x)$ *et* $g(x)$ ont le même signe sur $]1;+\infty[$.

Or $\forall x \in]1;\alpha[, g(x) > 0$, $\forall x \in]\alpha;+\infty[, g(x) < 0$ *et g(α)=0.*

Donc $\forall x \in]1;\alpha[, f'(x) > 0$, $\forall x \in]\alpha;+\infty[, f'(x) < 0$ *et f'(α)=0.*

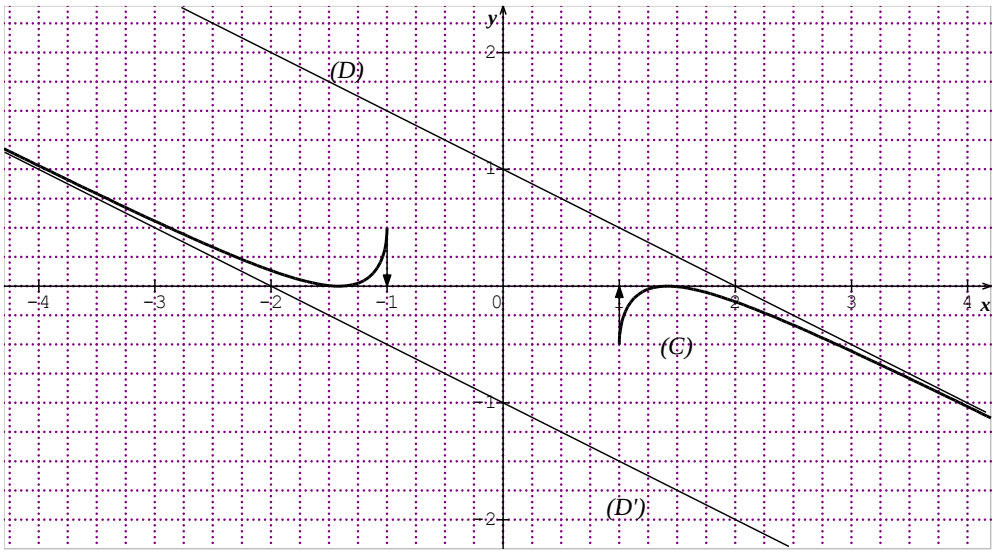
Par conséquent f est strictement croissante sur $]1;\alpha]$ et f est strictement décroissante sur $[\alpha;+\infty[$.

x	1		α		$+\infty$
f'(x)	▨	+	0	−	
f(x)	$-\frac{1}{2}$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

5. $f(\alpha) = -\frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha}$. $g(\alpha) = 0 \Rightarrow 2 - \alpha^2\sqrt{\alpha^2-1} = 0 \Rightarrow \sqrt{\alpha^2-1} = \frac{2}{\alpha^2}$.

Donc $f(\alpha) = -\frac{\alpha}{2} + \frac{2}{\alpha^3}$.

6.Tracé de (C)et(D)



14 Déterminons une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.
Soit F une primitive de f sur I.

a) f : $x \longmapsto \frac{x^3}{3}$+ 4x²-x+3 ; I=$\mathbb{R}$: F: $x \longmapsto \frac{x^4}{12} + \frac{4x^3}{3} - \frac{x2}{2} + 3x$

b) f : $x \longmapsto \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{6}{x^4} - \frac{3}{\sqrt{x}}$; $I =]0;+\infty[$ F: $x \longmapsto \frac{-1}{x} + \frac{2}{2x^2} - \frac{6}{3x^3} - 6\sqrt{x}$

c) f: $x \longmapsto (x-1)(x+2)^2 = x^3 + 3x^2 - 4$ I=$\mathbb{R}$: F: $x \longmapsto \frac{x^4}{4} + x^3$ -4x

d) f : $x \longmapsto \frac{x^3-2}{x^5} = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^5}$ I=$]0;+\infty[$: F: $x \longmapsto \frac{-1}{x} + \frac{1}{2x^4}$

e) f: $x \longmapsto \frac{-5}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt{x}$; I= $]0;+\infty[$: F: $x \longmapsto$ -15$x^{\frac{1}{3}}$ +$\frac{2}{3}x\sqrt{x}$

f) f: $x \longmapsto$ -2sinx +cosx I=$\mathbb{R}$: F: $x \longmapsto$ 2cosx + sinx

g) f: $x \longmapsto tan^2\, x$, I=$\left]0; \frac{\Pi}{2}\right[$: F: $x \longmapsto tanx - x$.

16 a) Posons $u(x) = x^3 - 3$, $u'(x) = 3x^2$ on obtient : $f(x) = u'(x)[u(x)]^4$ donc la fonction F définie sur IR par $F(x) = \frac{1}{5} \times (x^3-1)^5$ est une primitive de f sur IR.

b) Posons $u(x) = 1 - x$, $u'(x) = -1$ on obtient $f(x) = -\frac{u'(x)}{(u(x))^2}$ donc la fonction F définie sur]1 ;+∞[. par $F(x) = \frac{1}{1-x}$ est une primitive de f sur]1 ;+∞[.

c) Posons $u(x) = 4x + 1$ $u'(x) = 4$ on obtient : $f(x) = \frac{1}{4} \times u'(x)[u(x)]^3$donc la fonction F définie sur IR par $F(x) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}(4x+1)^4 = \frac{1}{16}(4x+1)^4$ est une primitive de f sur IR.

d)Posons $u(x) = 1 - x^2$, $u'(x) = -2x$ on obtient : $f(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{(u(x))^4}$ donc la fonction F définie sur]-1 ;1[. par $F(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{-1}{3(1-x^2)^3} = \frac{1}{6(1-x^2)^3}$ est une primitive de f sur]-1 ;1[.

e) Posons $u(x) = 4x + 1$ $u'(x) = 4$ on obtient : $f(x) = \frac{5}{4} \times \frac{u'(x)}{(u(x))^3}$donc la fonction F définie sur]0 ;+∞[. par $F(x) = \frac{5}{4} \times \frac{-1}{2(4x+1)^2} = \frac{-5}{8(4x+1)^2}$ est une primitive de f sur]0 ;+∞[.

f) Posons $u(x) = 2x$, $u'(x) = 2$ on obtient : $3\sin 2x = \frac{3}{2}u'(x)\sin u(x)$.
Posons $v(x) = x - 1$, $v'(x) = 1$ on obtient $\cos(x-1) = v'(x)\cos v(x)$.
$f(x) = \frac{3}{2}u'(x)\, sin\, u(x) + v'(x)cosv(x)$. Donc une primitive de f sur IR est la fonction F définie par : $F(x) = -\frac{3}{2}cos2x + sin(x-1)$.

g) Posons $u(x) = x^2 + 1$, $u'(x) = 2x$ on obtient : $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ donc la fonction F définie sur IR par : $F(x) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2+1}$ est une primitive de f sur IR

i) Posons $u(x) = sinx$, $u'(x) = cosx$ on obtient : $f(x) = u'(x)[u(x)]^2$ donc la fonction F définie sur IR par : $F(x) = \frac{1}{3}[sin(x)]^3$est une primitive de f sur IR

j) Posons $u(x) = x^2$, $u'(x) = 2x$ on obtient : $f(x) = \frac{1}{2} \times u'(x)\, sin\, u(x)$ donc la fonction F définie sur IR par $F(x) = -\frac{1}{2}cos(x^2)$ est une primitive de f sur IR

k) Posons $u(x) = 6 - 2cosx, u'(x) = 2sinx$ on obtient $f(x) = \frac{3}{2} \times \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ donc la fonction F définie sur IR par : $F(x) = \frac{3}{2} \times 2\sqrt{6 - 2cosx} = 3\sqrt{6 - 2cosx}$ est une primitive de f sur IR.

CHAPITRE 3

13 1. $a)$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} [x - 4 + \ln(\frac{x}{x+1})]$

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} (x - 4) = -4$

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \left(\frac{x}{x+1}\right) = 0 \quad et \quad \lim\limits_{\substack{y\to 0 \\ >}} lny = -\infty \, , donc \quad \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \ln(\frac{x}{x+1}) = -\infty.$

En ajoutant ces deux dernières limites, on obtient: $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$ prouve que l'axe des ordonnées est asymptote à(C).

2. a) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - 4) = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} (1) = 1 \; et \; \lim\limits_{y\to 1} lny = 0, donc \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(\frac{x}{x+1}) = 0.$

En ajoutant ces deux dernières limites, on obtient: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (x - 4)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0 \; d'après \; la \; question \; précédente.$

Il an résulte que la droite (D) d'équation est asymptote à (C) en $+\infty$.

c) Pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[, f(x) - (x - 4) = \ln(\frac{x}{x+1})$

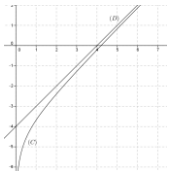
Quel que soit $x \in]0\,;\,+\infty[, x + 1 > x > 0 \; donc \; 0 < \frac{x}{x+1} < 1. Donc \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) < 0.$

3. f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$. Pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[, f'(x) = 1 + \frac{\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}} = \frac{x^2+x+1}{x(x+1)}$.

Pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[, x^2 + x + 1 > 0 \; et \; x(x + 1) > 0.$ Donc $\forall\, x \in]0\,;\,+\infty[, f'(x) > 0.$ Il en résulte que f est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	|	+	
$f(x)$	|	-∞ ↗	$+\infty$

4. Représentation graphique.



18 **1.** L'ensemble de définition de f est : $\{0\} \cup]0;+\infty[= [0;+\infty[$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{x^2}{2}\left(lnx - \frac{3}{2}\right) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (\frac{1}{2}x^2 lnx - \frac{3}{4}x^2)$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = 0$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x^2 lnx = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (x^2) = 0$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = f(0) = 0$ *donc* f *est continue en* 0 .

b) $\forall x \in]0;+\infty[, \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x^2}{2}(lnx - \frac{3}{2})}{x} = \frac{x}{2}\left(lnx - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}xlnx - \frac{3}{2}x$

or $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (\frac{1}{2}xlnx - \frac{3}{2}x) = 0$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} xlnx = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (x) = 0$

$d'où \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ donc f est dérivable en 0 *et* $f'(0) = 0$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2}\left(lnx - \frac{3}{2}\right)$ *or* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(lnx - \frac{3}{2}\right) = +\infty$

$d'où \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2}\left(lnx - \frac{3}{2}\right) = +\infty$ *donc* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3.a) $\forall x \in]0;+\infty[f'(x) = x\left(lnx - \frac{3}{2}\right) + \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} = xlnx - \frac{3}{2}x + \frac{x}{2} = xlnx - x$ *donc* $\forall x \in]0;+\infty[f'(x) = x(lnx - 1)$

b) $\forall x \in]0;+\infty[$ le signe de $f'(x)$ est celui de $lnx - 1$ *car* $x > 0$

$lnx - 1 = 0 \Leftrightarrow x = e$; $lnx - 1 > 0 \Leftrightarrow lnx > 1 \Leftrightarrow x > e$

$d'où \ \forall x \in]0;e[f'(x) < 0$ *et* $, \forall x \in]e;+\infty[, f'(x) > 0.$

On en déduit que f est strictement décroissante sur $[0;e]$ et strictement croissante sur $[e;+\infty[$.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	0	+	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{e^2}{4}$	↗	$+\infty$

4. Une équation de (T) est : $y = f'(1)(x-1) + f(1)\ f'(1) = -1$ *et* $f(1) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}$ donc une équation de (T) est *:* $y = -x + \frac{1}{4}$.

5.a) h est dérivable sur $]0;+\infty[$. $\forall x \in]0;+\infty[, h'(x) = f'(x) + 1 = x(lnx - 1) + 1.$

$\forall x \in]0;+\infty[,\ h''(x) = lnx - 1 + x \times \frac{1}{x} = lnx.$

D'où *:* $\forall x \in]0;1[, h''(x) < 0$ *et* $\forall x \in]1;+\infty[, h''(x) > 0$ *et* $h''(1) = 0.$

On en déduit que h' est strictement décroissante sur $]0;1]$ et strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$h''(x)$	▨	$-$	0	+	
$h'(x)$	▨	↘	0	↗	

b) sur $]0;+\infty[$ h'' s'annule en 1 en changeant de signe passant des valeurs négatives à des valeurs positives. Donc h' admet en 1 un minimum de valeur h'(1)=0.

On en déduit que : $\forall x \in]0;+\infty[, h'(x) > 0.$

Par suite la fonction h est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

c)$h(1) = f(1) + 1 - \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 0.$

La fonction h est strictement croissante sur $]0;+\infty[$et $h(1) = 0$ d'où :

$0 < x < 1 \Leftrightarrow h(x) < 0$ *et* $x > 1 \Leftrightarrow h(x) > 0$

Donc $\forall x \in]0;1[,\ h(x) < 0$, $\forall x \in]1;+\infty[,\ h(x) > 0$ *et* $h(1) = 0.$

d) le signe de $f(x) - (-x + \frac{1}{4})$ permet de préciser la position relative de (C) et (T).

$\forall x \in]0;+\infty[\ f(x) - \left(-x + \frac{1}{4}\right) = h(x)$ d'où d'après la question 5c)

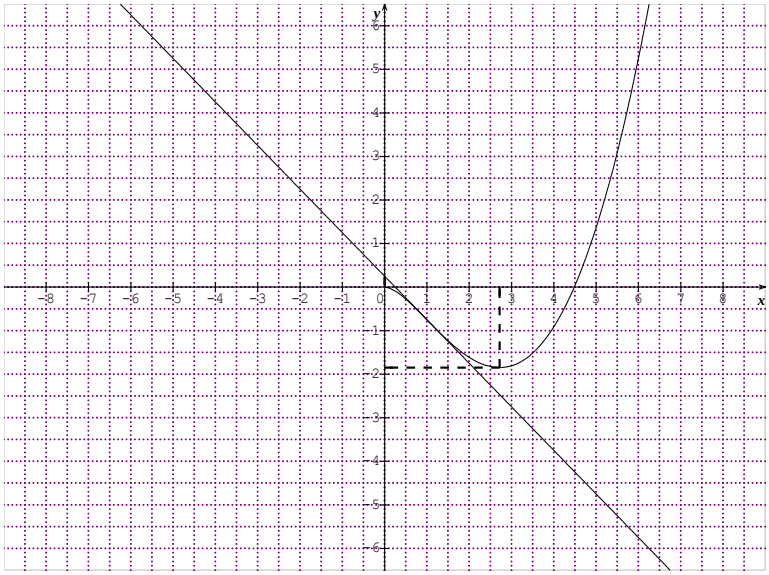
$f(x) - \left(-x + \frac{1}{4}\right) < 0$ *pour* $x \in]0;1[$; $f(x) - \left(-x + \frac{1}{4}\right) > 0$ *pour* $x \in]1;+\infty[$ *;*

$f(x) - \left(-x + \frac{1}{4}\right) = 0$ *pour* $x = 1$.

Par conséquent : la courbe (C) est au-dessous de (T) sur$]0;1[$;

la courbe (C) est au-dessus de (T) sur$]1;+\infty[$;

la courbe (C) coupe (T) au point d'abscisse 1.



19 Partie A

1.**a)** Dg ={ $x \in IR \,/\, x > 0 \; et \; lnx \neq 0\} \cup \{0\}$

$lnx = 0 \Leftrightarrow x = 1$. D'où D$g$ = [0 ; 1[∪]1; +∞[.

b) • $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \lim\limits_{x\to 1} x \times \frac{1}{(lnx)^2}$

$On\ a \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{(lnx)^2} = +\infty\ car\ \lim\limits_{x\to 1}(lnx)^2 = 0\ et (lnx)^2 > 0\ pour\ tout\ x\ \in]0\,;1[\cup]1;+\infty[.$

$On\ a\ \lim\limits_{x\to 1} x = 1$

En multipliant ces deux dernières limites, on obtient: $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = +\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \lim g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{(lnx)^2}$

Effectuons un changement de variable, en posant X = $\sqrt{x}$; $x = X^2$.

Lorsque x tend vers + ∞, X tend vers + ∞.

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{(lnx)^2} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{X^2}{(lnX^2)^2} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{X^2}{4(lnX\ )^2} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{4} \times \frac{1}{(\frac{\ln X}{X})^2}$

On sait que $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{lnX}{X} = 0$, donc $\lim\limits_{X\to+\infty} (\frac{\ln X}{X})^2 = 0$. Par suite, $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{(\frac{\ln X}{X})^2} = +\infty$.

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{(lnx)^2}$

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} lnx = +\infty, donc \lim\limits_{x\to+\infty} (lnx)^2 = +\infty. Par\ suite, \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{(lnx)^2} = 0.$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$.

d) D'après les questions précédentes :

. $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = +\infty$, donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à (C).

. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 0$, donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction (OI) en +∞.

2. **a)** g(0) = -1

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{(lnx)^2} - 1$

$\lim\limits_{x\to 0} lnx = -\infty, donc \lim\limits_{x\to 0} (lnx)^2 = +\infty.$

$\lim\limits_{x\to 0} x = 0.$

En faisant le quotient des deux limites précédentes, on obtient : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{(lnx)^2} = 0.$

D'où : $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -1$

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0)$ donc g est continue en 0.

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x) - g(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{(lnx)^2}$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} lnx = -\infty, donc \lim\limits_{x\to 0} (lnx)^2 = +\infty$. Par suite, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{(lnx)^2} = 0.$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x} = 0.$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x) - g(0)}{x}$ est finie donc g est dérivable à droite en 0 et $g'(0) = 0.$

Comme g'(0) = 0 donc la courbe (C) admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente horizontale.

3. g est dérivable sur $]0; 1[et\ sur]1; +\infty[$.

a) $\forall\ x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[, g'(x) = \frac{(lnx)^2 - x \times 2\frac{1}{x} lnx}{(lnx)^4} = \frac{(lnx)(lnx-2)}{(lnx)^4}$

Comme $(lnx)^4 > 0\ sur\ ]0; 1[\cup]1; +\infty[, donc\ g'(x)\ est\ du\ signe\ de\ (lnx)(lnx - 2).$

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow (lnx)(lnx - 2) = 0 \Leftrightarrow lnx = 0\ ou\ lnx - 2 = 0$

$\Leftrightarrow lnx = 0\ ou\ lnx = 2 \quad \Leftrightarrow x = 1\ ou\ x = e^2.$

Comme $x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[, alors : g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^2$.

- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow (lnx)(lnx - 2) > 0$

$lnx > 0 \Leftrightarrow x > 1;$

$lnx - 2 > 0 \Leftrightarrow lnx > 2 \Leftrightarrow x > e^2.$

x	0		1		e^2	+ ∞
ln$x$	‖	-	‖	+		+
ln$x$ – 2	‖	-	‖	-	0	+
(ln$x$)(ln$x$ – 2)	‖	+	‖	-	0	+

Il en résulte que :
$\forall\, x \in]0;1[\cup]1;+\infty[$. g'(x) > 0 ;
$\forall\, x \in]1;e^2[$. g'(x) < 0.
b) On déduit de ce qui précède que :
g est strictement croissante sur [0 ;1[et sur]1; $+\infty$[;
g est strictement décroissante sur]1; e^2].
Tableau de variation de g

X	0		1		e^2		$+\infty$
g'(x)	0	+	‖	-		+	
g(x)		$+\infty$	‖	$+\infty$			$+\infty$
	-1	↗	‖	↘	$\frac{e^2}{4}-1$	↗	

4) **a)** La fonction g est continue et strictement croissante sur [0 ;1[, donc elle réalise une bijection de [0 ;1[sur g([0 ;1[) = $[-1;\ +\infty[$. Or $0 \in [-1;\ +\infty[$; donc l'équation: $x \in IR$, $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0;1[$.
b) 0,4 et 0,5 appartiennent à]0 ;1[.
On a : g(0,4) ≈ -0,52 et g(0,5) ≈ 0,04, d'où $g(0,4)\times g(0,5) < 0$.
On déduit que $0,4 < \alpha < 0,5$.
c)∗ g est strictement croissante sur]0 ;1[et g(α) = 0 d'où :
$\forall x \in]0;\alpha[, g(x) < 0\ et\ \forall\, x \in]\alpha;1[, g(x) > 0$.
∗ g'(x) s'annule e^2 en changeant de signe, donc g(e^2) est le minimum de g sur]1 ; $+\infty$[car g est strictement décroissante sur $]1;e^2[$ et strictement croissante sur $]e^2;\ +\infty[$;
Or $\frac{e^2}{4}-1 \approx 0,85$, $\frac{e^2}{4}-1 > 0$ donc $\forall x \in]1\ ;\ +\infty[, g(x) > 0$.
Finalement, $\forall\, x \in]0;\alpha[, g(x) < 0$ et $\forall\, x \in]\alpha;1[\cup]1;+\infty[, g(x) > 0$.

Partie B 1.a)

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} [\frac{1}{x} - \frac{1}{lnx}]$$

$$On\ a \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$On\ a \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{lnx} = 0\ \ car\ \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} lnx = -\infty.$$

En ajoutant ces deux dernières limites, on obtient: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = +\infty$.

$* \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} [\frac{1}{x} - \frac{1}{lnx}]$

$On\ a\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} (\frac{1}{x}) = 1$

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \left(\frac{1}{lnx}\right) = -\infty\ car\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} lnx = 0\ et\ lnx < 0\ sur\ ]0;1[$. D'où $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \left(-\frac{1}{lnx}\right) = +\infty$

Finalement, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = +\infty$.

On montre de même que : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = -\infty$

$* \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} [\frac{1}{x} - \frac{1}{lnx}]$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{1}{x}) = 0\ et\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{lnx}\right) = 0\ donc\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

b) D'après les questions précédentes :

. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à (C).

. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = +\infty\ et\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = -\infty\ donc\ la\ droite\ d'équation\ x = 1$ $est\ asymptote$ à (C).

. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, donc l'axe (OJ) est asymptote à (C) en $+\infty$.

2. **a)** $\forall\ x \in]0;1[\cup]1;+\infty[, f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x(lnx)^2} = \frac{g(x)}{x^2}$.

Comme $x^2 > 0\ sur\ ]0;1[\cup]1;+\infty[$, alors $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.

On déduit de la partie A-4)c. que :

$\forall\ x \in]0;\alpha[, f'(x) < 0$ et $\forall\ x \in]\alpha;1[\cup]1;+\infty[, f'(x) > 0$.

D'où f est strictement décroissante sur $]0;\alpha]$ et strictement croissante sur chacun des intervalles $[\alpha;1[et\ ]1;+\infty[$.

Tableau de variation de *f* :

x	0		α		1		+ ∞
f'(x)	‖	-	0	+	‖	+	
f(x)	‖	+∞ ↘	$f(\alpha)$	↗ +∞	‖	$-\infty$ ↗	0

3.a) $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{ln\alpha}$.

$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{(ln\alpha)^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow (ln\alpha)^2 = \alpha \Leftrightarrow ln\alpha = \sqrt{\alpha}\ ou\ ln\alpha = -\sqrt{\alpha}$

Comme $\alpha \in]0{,}4; 0{,}5[$ $donc$ $ln\alpha < 0$. D'où $ln\alpha = -\sqrt{\alpha}$.

On obtient $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{-\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1+\sqrt{\alpha}}{\alpha}$.

b) Déduisons le signe de *f(x)* :

* D'après l'étude de variations de f, $f(\alpha)$ est le minimum de f sur]0 ;1[, or $f(\alpha) > 0$.

D'où $\forall\, x \in]0; 1[, f(x) > 0$.

* f est strictement croissante sur $]1; +\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, donc : $\forall\, x \in]1; +\infty[$, *f(x)* < 0.

On en déduit : $\forall\, x \in]0; 1[, f(x) > 0$ et $\forall\, x \in]1; +\infty[$, *f(x)* < 0.

4. Tracé de (C). Voi (Γ) ohique ci-dessous.

Partie C

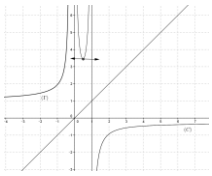
1. D'après le résultat obtenu à la question Partie A2)a., f est continue et strictement sur $]1; +\infty[$, donc f réalise une bijection de $]1; +\infty[$ sur $]-\infty; 0[$, donc la restriction *h* de *f* à $]1; +\infty[$ est une bijection de $]1; +\infty[$ sur $]-\infty; 0[$.

2. a) On a *h*(e) = *f*(e) = $\frac{1}{e} - 1 = \frac{1-e}{e}$.

b) $h'(e) = \frac{g(e)}{e^2} = \frac{e-1}{e^2}$, donc $h'(e) \neq 0$. On en déduit que h^{-1} est dérivable en $\frac{1-e}{e}$ et on donc : $(h^{-1})'(\frac{1-e}{e}) = \frac{1}{h'(e)} = \frac{e^2}{e-1}$.

c) (Γ) et la représentation graphique de *h* sont symétriques par rapport à la droite d'équation y = x.

Voir graphique.



CHAPITRE 4

12 $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 3+(x-1)e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 3+xe^{-x}-e^{-x}$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 3$

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 3+\dfrac{x-1}{e^x}$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-1}{e^x} = \lim\limits_{x\to-\infty} (x-1)\frac{1}{e^x} = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$.

1. *a*) $\forall x \in$ IR, $h'(x) = e^{-x} - (x-1)e^{-x} = e^{-x}(1-x-1) = (2-x)e^{-x}$
   b) $\forall x \in$ IR, $e^{-x} > 0$ donc $h'(x)$ a le signe de $(2-x)$.
   Ainsi :
   $\forall x \in]-\infty; 2[, h'(x) > 0$ donc h est strictement croissante sur $]-\infty; 2]$;
   $\forall x \in]2; +\infty[, h'(x) < 0$ donc h est strictement décroissante sur $[2; +\infty[$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$h'(x)$		+	0	-	
$h(x)$	$-\infty$	↗	$3+e^{-2}$	↘	3

3. h est continue et strictement croissante sur $]-\infty; 2]$, donc
$h(]-\infty; 2],\ ) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} h(x); h(2)\right] =]-\infty; 3+e^{-2}]$.
Comme $0 \in]-\infty; 3+e^{-2}]$(car$3+e^{-2} > 0$) alors l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\propto$ dans $]-\infty; 2]$.
De plus $h(-1) = 3-2e$; $3-2e < 0$ et $h(0) = 2$. Donc $h(-1) \times h(0) < 0$ d'où $-1 < \propto < 0$.
4. ● h est strictement croissante sur $]-\infty; 2]$ et $h(\propto) = 0$.

- Si $x < \propto$ *alors* $h(x) < h(\propto)$ donc $\forall\, x \in]-\infty; \propto[, h(x) < 0$;

- Si $x > \propto$ *alors* $h(x) > h(\propto)$ donc $\forall\, x \in]\propto; 2], h(x) > 0$

● h est continue et strictement décroissante sur $[2; +\infty[$ donc
$h([2; +\infty[) = \left[h(2); \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)\right[=]3; 3+e^{-2}]$.
Ainsi $\forall x \in [2; +\infty[\ , h(x) > 0$.

En résumé : $\forall x \in]-\infty; \propto[, h(x) < 0$ et $\forall x \in]\propto; +\infty[, h(x) > 0$.

Partie B

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x+1-xe^{-x}$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x+1 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ d'après question 1) partie A, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 3x+1-xe^{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x(3+\frac{1}{x}-e^{-x})$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} -e^{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-1}{e^x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 3+\frac{1}{x} = 3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$.

2.f est dérivable sur IR et $f'(x) = 3-(e^{-x}-xe^{-x}) = 3+(x-1)e^{-x} = h(x)$

3. $\forall x \in$ IR, $f'(x) = h(x)$ donc d'après la question 4) partie A :

$\forall x \in]-\infty;\propto[, f'(x) < 0$ et $\forall x \in]\propto;+\infty[, f'(x) > 0$.

Ainsi f est strictement décroissante sur $]-\infty;\propto]$ et h est strictement croissante sur$[\propto;+\infty[$.

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4.On a $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-(3x+1)] = \lim\limits_{x\to+\infty} -xe^{-x} = 0$ d'après question 1) partie A.

Donc la droite (Δ)est asymptote à (C) en $+\infty$.

5.On a $\forall x \in$ IR, $f(x)-(3x+1) = -xe^{-x}$. Comme $\forall x \in$ IR, $e^{-x} > 0$, $\forall x \in$ IR, $f(x)-(3x+1)$ a le signe de $-x$.

Ainsi $\forall x \in]-\infty;0[, f(x)-(3x+1) > 0$ et $\forall x \in]0;+\infty;[, f(x)-(3x+1) < 0$.

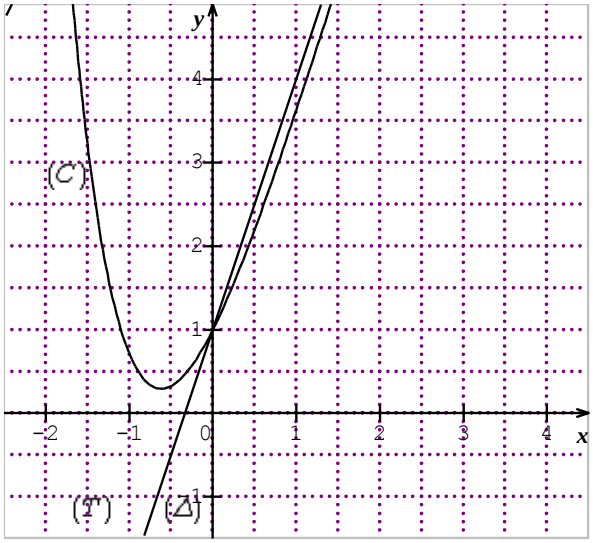
Par suite (C) est au-dessus de (Δ) sur $]-\infty;0[$ et (C) est au-dessous de (Δ)sur$]0;+\infty[$.

6. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(3+\frac{1}{x}-e^{-x}\right) = -\infty$ d'après question1) partie B . De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

donc (C) admet une branche parabolique de direction (OJ).

7. $(T): y = f'(0)(x-0)+f(0)$. On a $f'(0) = 2$ et $f(0) = 1$donc$(T): y = 2x+1$.

8. Représentation graphique de f



13 **Partie A**

1. calcul de limite

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x+1-e^x = -\infty \; car \lim\limits_{x\to-\infty} x+1 = -\infty \; et \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x(-1+\frac{1}{e^x}+xe^{-x})$

$On\ a$: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

$On\ a$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \;\; et \lim\limits_{x\to+\infty} x\,e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (-1+\frac{1}{e^x}+xe^{-x}) = -1$;

Donc par produit de limite: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

2.$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 1-e^x$.

3. $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

$g'(x) > 0 \;\Leftrightarrow 1-e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$.

Donc: $\forall x \in]-\infty;0[\,, g'(x) > 0 \;\; et \forall x \in]0;+\infty[\,, g'(x) < 0$.

g est strictement croissante sur$]-\infty;0]$ et strictement décroissante sur$[0;+\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

g admet pour maximum 0 sur IR donc: $\forall x \in \mathbb{R}\,, g(x) \leq 0$.

Partie B

1. a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (3x^2e^{-x} + 3xe^{-x})$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = 0\ et\ \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0\ donc\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0.$

$b)\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 3(x^2 + x)e^{-x} = +\infty\ car$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty\ avec\ X = -x\ et \quad \lim\limits_{x\to-\infty} 3(x^2 + x) = \quad \lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 3(x+1)e^{-x}.$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty\ et\ \lim\limits_{x\to-\infty} 3(x+1) = \lim\limits_{x\to-\infty} 3x = -\infty\ donc\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty\ .$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction (OJ) en$-\infty$

2.a)$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (6x + 3)e^{-x} - e^{-x}(3x^2 + 3x) = 3e^{-x}(-x^2 + x + 1)$

b) signe de *f'(x)*

$\forall x \in \mathbb{R}, 3 > 0, e^{-x} > 0$donc le signe de f'$(x)$ est celui de $-x^2 + x + 1$.

$-x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

On en déduit :

$\forall x \in]-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}[\cup] \frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty[, f'(x) < 0;$

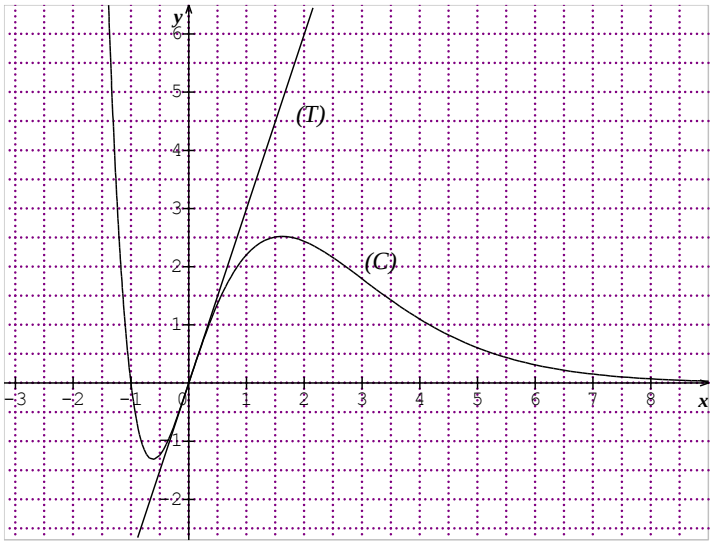
$\forall x \in \left]\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[, f'(x) > 0$.

Ainsi : f est strictement croissante sur $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left]-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$.

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	m	↗	M	↘	0

$f(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) = m$ et $f(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ = M.

4. Tracé



14 ***Partie A :***

1. $D_g = \{ x \in IR / e^x - 1 \neq 0 \}$. $D_g =]-\infty; 0[U]0 ; +\infty[$

$* \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{e^x}{e^x-1}\right)$; $on\ a \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ $et \lim\limits_{x\to-\infty} e^x - 1 = -1$

$par\ suite \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{e^x-1}\right) = 0\ donc \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$.

$* \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{e^x}{e^x-1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{e^x}{e^x(1-\frac{1}{e^x})}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1-\frac{1}{e^x}}\right)$.

$On\ a : \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty\ donc \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x} = 0$

$par\ suite \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{e^x}}\right) = 1\ et \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1-\frac{1}{e^x}}\right) = 2\ donc \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 2.$ *

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}\left(1+\frac{e^x}{e^x-1}\right) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}\left(1+e^x\times\frac{1}{e^x-1}\right)$ on a : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}(e^x-1) = 0$

$donc \lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}\left(\frac{1}{e^x-1}\right) = -\infty\ car\ \forall x < 0\ \ e^x - 1 < 0\ par\ suite \lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}\left(e^x\times\frac{1}{e^x-1}\right) = -\infty$

$donc \lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} g(x) = -\infty.$

$* \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\left(1+\frac{e^x}{e^x-1}\right) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\left(1+e^x\times\frac{1}{e^x-1}\right)\ on\ a : \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}(e^x-1) = 0$

$donc \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\left(\frac{1}{e^x-1}\right) = +\infty\ car\ \forall x > 0\ \ e^x - 1 > 0\ par\ suite \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\left(e^x\times\frac{1}{e^x-1}\right) = +\infty$

$donc \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} g(x) = +\infty.$

2. *Soit* $x \in IR\setminus\{0\}$.

$g(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{e^x}{e^x-1} = 0 \Leftrightarrow -e^x + 1 = e^x \Leftrightarrow 2e^x = 1 \Leftrightarrow x = -ln2$

3. g est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

Pour tout $x \in IR\setminus\{0\}$, $g'(x) = -\frac{e^x}{(e^x-1)^2}$.

Pour tout $x \in IR\setminus\{0\}$, $g'(x) < 0$ donc

g est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

X	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	||	$+$
$g(x)$	1 ↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘ 2

4. Signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

- $g(-\ln2) = 0$ et g est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ par suite on a :
  - $x < -\ln2 \Leftrightarrow g(x) > g(-\ln2) \Leftrightarrow g(x) > 0$.
  - $-\ln2 < x < 0 \Leftrightarrow x > -\ln2 \Leftrightarrow g(x) < g(-\ln2) \Leftrightarrow g(x) < 0$.
- Par ailleurs g est continue et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ et $g(]0; +\infty[) =]2; +\infty[$ donc pour tout $x \in]0; +\infty[$, $g(x) > 0$.

Ainsi : pour tout $x \in]-\infty; -\ln2[\cup]0; +\infty[$, $g(x) > 0$ et pour tout $x \in]-\ln2; 0[$, $g(x) < 0$.

Partie B

1. *a)* $x \in D_f \Leftrightarrow 1 - e^x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ *donc* $D_f = IR\setminus\{0\}$.

b) $* \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x + \ln(4\,|\,1 - e^x\,|) = \lim\limits_{x\to-\infty} x + \ln4 + \ln|\,1 - e^x\,|$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \ln|\,1 - e^x\,| = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1 - e^x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 - e^x = 1$ *et* $\lim\limits_{x\to1} \ln x = 0$;

$donc \lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1 - e^x) = 0\ par\ suite \lim\limits_{x\to-\infty} x + \ln4 = -\infty\ donc \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$* \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x + \ln(4\,|\,1 - e^x\,|) = \lim\limits_{x\to+\infty} x + \ln4 + \ln|\,1 - e^x\,|$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln|\,1 - e^x\,| = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^x - 1)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - 1 = +\infty\ et\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

$donc \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^x - 1) = +\infty\,.\,Par\ suite \lim\limits_{x\to+\infty} x + \ln4 = +\infty$

$donc \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$

$* \lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} x + \ln(4\,|\,1 - e^x\,|) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} x + \ln4 + \ln(1 - e^x)$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \ln(1-e^x) = 0$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x = -\infty$ *donc* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \ln(1-e^x) = -\infty$

par suite $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} x + ln4 = ln4$ *donc* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = -\infty$.

$* \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x + \ln(4\,|\,1-e^x\,|) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x + \ln 4 + \ln(e^x-1)$ *on a* : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (e^x-1) = 0$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (e^x-1) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x = -\infty$ *donc* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (e^x-1) = -\infty$

par suite $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x + \ln 4 = \ln 4$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = -\infty$.

2.a) $1 - \mathrm{e}^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$.

Par conséquent :

pour tout $x \in]-\infty; 0[$, $\mathrm{f}(x) = x + \ln 4(1-\mathrm{e}^x) = x + \ln 4 + \ln(1-\mathrm{e}^x)$;

pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\mathrm{f}(x) = x + \ln 4(\mathrm{e}^x - 1) = x + \ln 4\, \mathrm{e}^x(1-e^{-x}) = 2x + \ln 4 + \ln(1-e^{-x})$

b)$\forall x \in]-\infty; 0[, f(x) - (x + \ln 4) = \ln(1-e^x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (x+\ln 4)] = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1-e^x) = 0$ *justifiée en* 1. *b*)

$\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (x+\ln 4)] = 0$ donc la droite (D_1)d'équation $\mathrm{y} = \mathrm{x} + \ln 4$ est une asymptote oblique à (C) en $-\infty$

$\forall x \in]0; +\infty[f(x) - (2x + \ln 4) = 2x + \ln 4 + \ln(1-e^{-x}) - 2x - \ln 4 = \ln(1-e^{-x})$

$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (2x+\ln 4)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1-e^{-x}) = 0$ *car* $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (2x+\ln 4)] = 0$ donc la droite (D_2)d'équation $\mathrm{y} = 2\mathrm{x} + \ln 4$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$

c)$(C) \cap (D_1) = \{A\}$.

$f(x) = x + \ln 4 \Leftrightarrow \ln|1-e^x| = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2$

$f(\ln 2) = \ln 2 + \ln 4 = \ln 8$. Donc A $(\ln 2;\ \ln 8)$

d**)** La position relative de (C) et(D_2) est donnée par le signe de $f(x) - (2x + \ln 4)$.

On a :. $\forall x \in]0; +\infty[,\ f(x) - (2x + \ln 4) = \ln(1-e^{-x})$

$x \in]0; +\infty[\ , e^{-x} > 0 \Longrightarrow -e^{-x} < 0$

$\Longrightarrow 1 - e^{-x} < 1$

$\Longrightarrow \ln(1-e^{-x}) < 0$.

Donc : $\forall x \in]0; +\infty[\ ,\quad f(x) - (2x + \ln 4) < 0$.

Ainsi, (C) est au-dessous de $(\mathrm{D}_2$) sur$]0; +\infty[$.

2.a) $\forall x \in IR\setminus\{0\}, f'(x) = 1 + \frac{4(-e^x)}{4(1-e^x)} = 1 + \frac{e^x}{e^x-1}$ *or* $g(x) = 1 + \frac{e^x}{e^x-1}$

donc $\forall x \in IR\setminus\{0\}, f'(x) = g(x)$.

b) le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$. Donc d'après la question 4) de la partie A)

$\forall x \in]-\infty; -ln2[\cup\ ]0; +\infty[\ ,\ f'(x) > 0$ *et* $\forall x \in]-ln2; 0[,\ f'(x) < 0$.

Par conséquent :

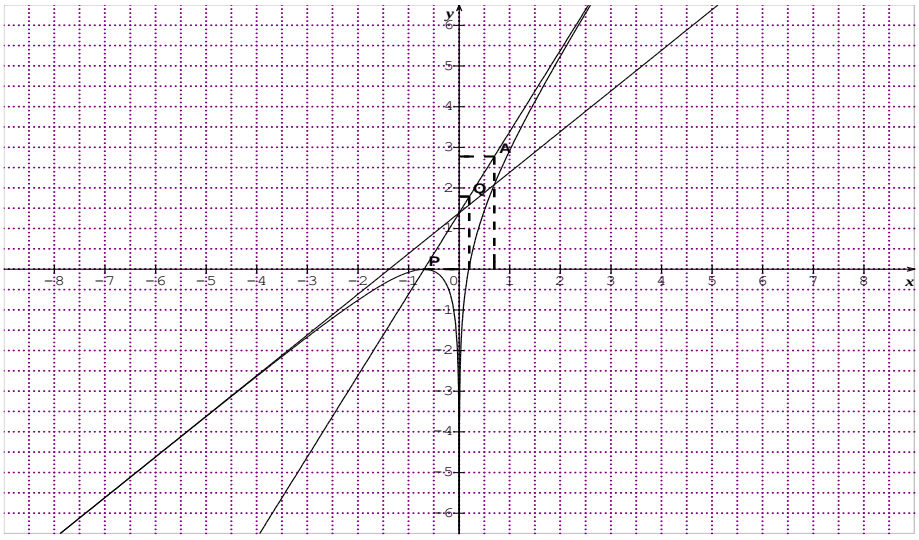
f est strictement croissante sur $]-\infty; -\ln 2]$;
f est strictement décroissante sur $[-\ln 2; 0[$et sur $]0; +\infty[$.

tableau de variation

x	$-\infty$	-ln2	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0	↘ $-\infty$	$+\infty$ ↗ $-\infty$

4a)
h est la restriction de f à l'intervalle $]0; +\infty[$donc
h est continue strictement croissante sur $]0; +\infty[$. De plus $h(]0; +\infty[) = IR$. Or $0 \in IR$ donc l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α dans$]0; +\infty[$.
Comme $h(0{,}18) \approx -0{,}08$; $h(0{,}19) \approx 0{,}01$. On a $h(0{,}18) \times h(0{,}19) < 0$ donc $0{,}18 < \alpha < 0{,}19$.
b) $h(\ln 2) = \ln 8 \Leftrightarrow (h^{-1})(\ln 8) = \ln 2$ donc $(h^{-1})'(\ln 8) = \frac{1}{h'(\ln 2)} = \frac{1}{3}$.
5. $(C) \cap (OI) = \{P; Q\}$ on a $f(-\ln 2) = 0$ et $f(\alpha) = 0$ donc (C) coupe (OI) en deux points $P(-\ln 2; 0)$ et Q $(0{,}2; 0)$

6.



CHAPITRE 5

6 ***1.a. Limite de f en $-\infty$***
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x2^x = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x\ln 2}$

Posons $X = x\ln 2$, *soit* $x = \frac{1}{\ln 2}X$. *Quand* $x \to -\infty$, $X \to -\infty$ *par suite on a :*

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to-\infty} \frac{1}{\ln 2} Xe^X = 0.$

Interprétation graphique *: La droite d'équation* $y = 0$ *est asymptote à (C) en* $-\infty$.

b. Limites quand x tend vers $+\infty$ ***de*** $f(x)$ ***et*** $\frac{f(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x2^x = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{x\ln 2}$.

$On\ a \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln 2 = +\infty\ et \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty\ donc \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln 2} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty\ et \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln 2} = +\infty\ donc \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2^x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln 2} = +\infty$.

Interprétation graphique *:* (C) admet une branche parabolique de direction (OJ) en $+\infty$.

2. Variations et tableau de variations de f

- Dérivée :

Pour tout $x \in IR$, $f(x) = xe^{x\ln 2}$. On a donc *:*

Pour tout $x \in IR$, $f'(x) = e^{x\ln 2} + x(\ln 2)e^{x\ln 2} = (1 + x\ln 2)e^{x\ln 2}$.

- Signe de la dérivée et variations

Pour tout $x \in IR$, $e^{x\ln 2} > 0$ *donc* $f'(x)$ *a le signe de* $1 + x\ln 2$. *Ainsi, pour tout* $x \in IR$,

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + x\ln 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\ln 2}$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty\ ;\ -\frac{1}{\ln 2}\right[$ *et* $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{1}{\ln 2}\ ;\ +\infty\right[$.

d'où f est strictement décroissante sur $\left]-\infty\ ;\ -\frac{1}{\ln 2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{\ln 2}\ ;\ +\infty\right[$.

- Tableau de variation

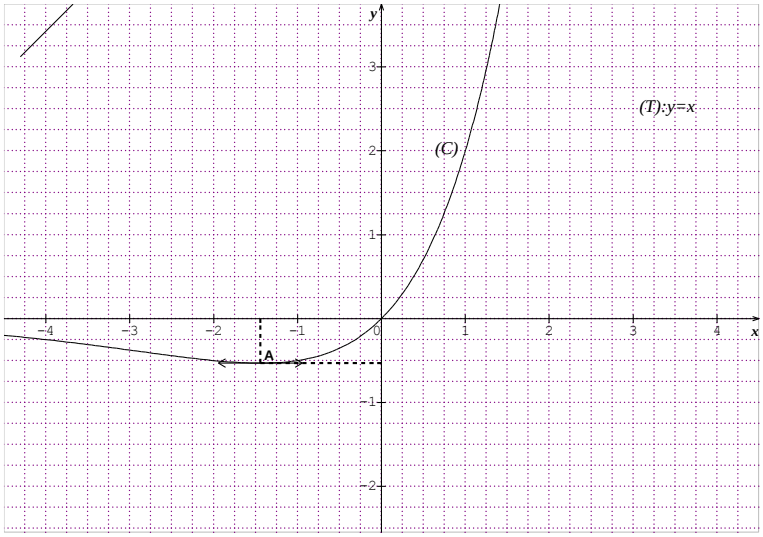
x	$-\infty$		$-\frac{1}{\ln 2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$f\left(-\frac{1}{\ln 2}\right)$	↗	$+\infty$

Avec $f\left(-\frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{-1}{e\ln 2} \approx -0{,}52$

3. Tangente (T) au point d'abscisse 0

$f'(0) = 1$ et $f(0) = 0$ par suite (T) a pour équation $y = x$.<<

4. Représentations graphiques



CHAPITRE 6

4 $a)\int_2^1 \frac{2}{\sqrt{2t-1}}dt$

Posons f(t) = $\frac{2}{\sqrt{2t-1}}$ et notons F une primitive de f sur [1 ;2].

Posons u(t) = 2t- 1, donc u'(t) = 2 et f(t) = $\frac{u\prime(t)}{\sqrt{u(t)}}$. D'où : F(t) = $2\sqrt{u(t)} = 2\sqrt{2t-1}$.

F(2) = $2\sqrt{3}$ et F(1) = 2. Donc : $\int_2^1 \frac{2}{\sqrt{2t-1}}dt$ = F(1) – F(2) = $2-2\sqrt{3}$.

$b)\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{4-3t}}dt$

Posons f(t) = $\frac{1}{\sqrt{4-3t}}$ et notons F une primitive de f sur [-1 ;1].

Posons u(t) = 4-3t , donc u'(t) = -3 et f(t) = $-\frac{1}{3}\frac{u\prime(t)}{\sqrt{u(t)}}$. D'où : F(t) = $-\frac{1}{3}(2\sqrt{u(t)}) = -\frac{2}{3}\sqrt{4-3t}$.

F(-1) = $-\frac{2}{3}\sqrt{7}$ et F(1) = $-\frac{2}{3}$. Donc : $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{4-3t}}dt$ = F(1) – F(-1) = $-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{7}$.

$g)\int_0^1 (x+1)(x^2+2x)^3 dx$

Posons f(x) = $(x+1)(x^2+2x)^3$ et notons F une primitive de f sur [0 ;1].

Posons u(x) = x^2+2x , donc u'(x) = 2x+2 et f(x) = $\frac{1}{2}u'(x)(u(x))^3$.

D'où : F(x) = $\frac{1}{8}(x^2+2x)^4$.

F(0) = 0 et F(1) = $\frac{81}{8}$. Donc : $\int_0^1 (x+1)(x^2+2x)^3 dx$ = F(1) – F(0) = $\frac{81}{8}$.

$h)\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$

Posons f(x) = $\frac{lnx}{x} = \frac{1}{x}lnx$ et notons F une primitive de f sur [1 ;e].

Posons u(x) = lnx , donc u'(x) = $\frac{1}{x}$ et f(x) = $u'(x)u(x)$.

D'où : F(x) = $\frac{1}{2}(lnx)^2$.

F(e) = $\frac{1}{2}$ et F(1) =0 . Donc : $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}$.

$i)\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}dx$

Posons f(x) = $\frac{(\ln x)^2}{x} = \frac{1}{x}(\ln x)^2$ et notons F une primitive de f sur [1 ;e].

Posons u(x) = lnx , donc u'(x) = $\frac{1}{x}$ et f(x) = $u'(x)u^2(x)$.

D'où : F(x) = $\frac{1}{3}(lnx)^3$.

On a : $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}dx = \frac{1}{3}$.

$k)\int_0^1 \frac{-4}{3+4x}dx$

Posons f(x) = $\frac{-4}{3+4x}$ et notons F une primitive de f sur [1 ;e].

Posons u(x) = $3 + 4x$, donc u'(x) = 4 et f(x) = $-\frac{u\prime(x)}{u(x)}$.

D'où : F(x) = $-ln|3 + 4x|$. Donc $\int_0^1 \frac{-4}{3+4x}dx$ = $\ln(\frac{3}{7})$

14

$a)\int_0^1 x\sqrt{x+1}dx$

Posons $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \sqrt{x+1} \end{cases}$ $d'o\grave{u}$ $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} \end{cases}$

$\int_0^1 x\sqrt{x+1}dx = \left[\frac{2}{3}x(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}dx = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \left[\frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{4\sqrt{2}}{15}$

$d)\int_0^{\pi} x\cos 2xdx$

Posons $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = cos2x \end{cases}$ $d'o\grave{u}$ $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \frac{1}{2}sin2x \end{cases}$

$\int_0^{\pi} x\cos 2xdx = \left[\frac{1}{2}xsin2x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{1}{2}sin2xdx = -\left[-\frac{1}{4}cos2x\right]_0^{\pi} = 0$

$g)\int_1^e \ln(x+1)dx$

Posons $\begin{cases} u(x) = \ln(x+1) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ $d'où \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x+1} \\ v(x) = x+1 \end{cases}$

$\int_1^e \ln(x+1)dx = [(x+1)\ln(x+1)]_1^e - \int_1^e 1dx = (e+1)\ln(e+1) - 2ln2 - [x]_1^e$

$\int_1^e \ln(x+1)dx = [(x+1)\ln(x+1)]_1^e - \int_1^e 1dx = (e+1)\ln(e+1) - 2ln2 - e + 1$

E15 f) Posons I = $\int_1^e x(lnx)^2dx$

Posons $\begin{cases} u(x) = (lnx)^2 \\ v'(x) = x \end{cases}$ $d'où \begin{cases} u'(x) = \frac{2}{x}lnx \\ v(x) = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

I = $\left[\frac{x^2}{2}(lnx)^2\right]_1^e - \int_1^e xlnxdx = \frac{e^2}{2} - \int_1^e xlnxdx$

Intégrons par parties, l'intégrale $\int_1^e xlnxdx$

Posons $\begin{cases} u(x) = lnx \\ v'(x) = x \end{cases}$ $d'où \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

$\int_1^e xlnxdx = \left[\frac{x^2}{2}lnx\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}xdx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2+1}{4}$

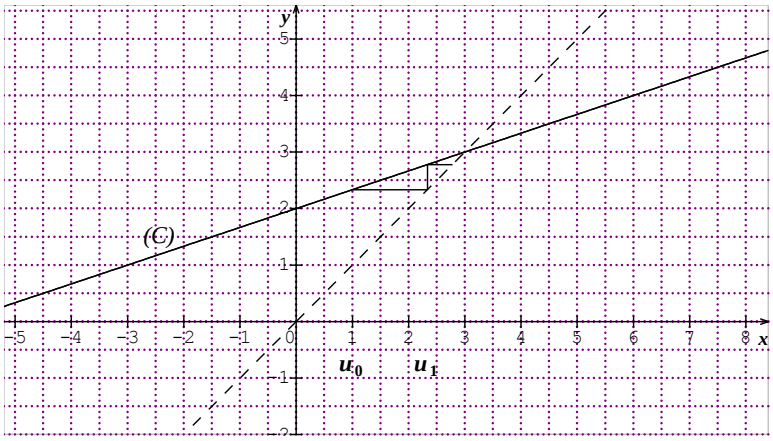
Enfin, I = $\frac{e^2-1}{4}$

CHAPITRE 7

E7

1 . Soit f la fonction définie sur IR, par : f(x) = $\frac{1}{3}x + 2$ et (C) sa courbe représentative.

Pour tout n de IN, on a : $u_{n+1} = f(u_n)$. On obtient la représentation graphique suivante :



2. Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 3$

$u_0 = 1, 1 < 3$ donc $u_0 < 3$

Supposons que la proposition est vraie au rang k et démontrons qu'elle est vraie au rang k+1.

On a : $u_k < 3 \Rightarrow \frac{u_k}{3} < 1 \Rightarrow \frac{u_k}{3} + 2 < 3 \Rightarrow u_{k+1} < 3.$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 3$.

3. On a prouvé que la suite (u_n) est majorée par 3, il reste à prouver qu'elle est croissante.

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -\frac{2}{3}(u_n - 3).$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 3,$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - 3 < 0$. Par suite, $\forall n \in \mathbb{N}, = -\frac{2}{3}(u_n - 3) > 0$. Par conséquent, la suite (u_n) est croissante.

La suite (u_n) est croissante et majorée par 3 donc elle est convergente .

4. $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - 3$

a) Démontons que la suite (v_n) est géométrique

$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}u_n - 1 = \frac{1}{3}(u_n - 3) = \frac{1}{3}v_n$ donc la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de 1^{er} terme $v_0 = -2$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 q^n = -2\text{x}(\frac{1}{3})^n$.

On a: $u_n = v_n + 3$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -2\text{x}(\frac{1}{3})^n + 3$

On a : $0 < \frac{1}{3} < 1$ *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} -2\text{x}(\frac{1}{3})^n = 0$. On en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$

5. a) $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

posons $\forall n \in \mathbb{N}, S'_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$.

S'_n est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de 1er terme v_0 .

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, S'_n = \frac{-2[(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}]}{\frac{2}{3}} = -3 + \frac{1}{3^n}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (v_0 + 3) + (v_1 + 3) + \cdots + (v_n + 3)$

$S_n = S'_n + 3(n+1) = -3 + \frac{1}{3^n} + 3(n+1) = \frac{1}{3^n} + 3n$.

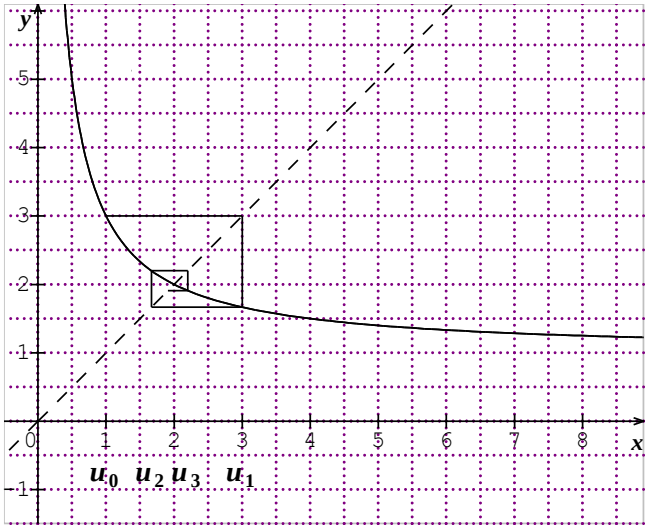
$b)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3^n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n = +\infty$.

E9

1. $x \in]0;+\infty[$, $\quad f(x) = x \Leftrightarrow \frac{2+x}{x} = x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \; ou \; x = -1 \Leftrightarrow x = 2$.

Donc : A(2 ;2).

2.a) $\forall n \in \mathbb{N}, U_0 = 1 \; et \; U_{n+1} = f(U_n)$.



b) La suite (U_n) converge vers 2 .

2. Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0$.

- $U_0 = 1$,$1 > 0$ donc $U_0 > 0$ la propriété est vérifiée 1^{er} au rang.
- Soit $k \in \mathbb{N}$, $supposons \; que \; U_k > 0$ et démontrons que $U_{k+1} > 0$.

On a : $U_{k+1} = \frac{2+U_k}{U_k}$. Comme $U_k > 0$, $\frac{2+U_k}{U_k} > 0$. Ainsi, $U_{k+1} > 0$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = \frac{-2+U_n}{1+U_n}$

a) $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = \frac{-2+U_{n+1}}{1+U_{n+1}}$ avec $U_{n+1} = \frac{2+U_n}{U_n}$.

On obtient : $V_{n+1} = \frac{-2+\frac{2+U_n}{U_n}}{1+\frac{2+U_n}{U_n}} = \frac{2-U_n}{2(U_n+1)} = -\frac{1}{2}V_n$ .Donc la suite (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{-1}{2}$ et de 1^{er} terme V_0. $\quad V_0 = \frac{-1}{2}$

b) D'où $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = (\frac{-1}{2})x(\frac{-1}{2})^n = (\frac{-1}{2})^{n+1}$.

c) Ecrivons U_n en fonction de V_n

$\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \frac{-2+U_n}{1+U_n} \quad \Rightarrow U_n = \frac{2+V_n}{1-V_n}$ d' où: $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{2+(\frac{-1}{2})^{n+1}}{1-(\frac{-1}{2})^{n+1}}$.

d) Comme $-1 < \frac{-1}{2} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{-1}{2})^{n+1} = 0$. Donc $\lim U_n = 2$.

10 1. Notons P(n) la proposition : « $U_n > 0$ et $V_n > 0$ » .

● $U_0 = 4$ et $V_0 = 9$ donc $U_0 > 0$ et $V_0 > 0$. Donc P(0) est vraie.

● Soit k un entier naturel quelconque : supposons que P(k) vraie et démontrons que P(k+1) est vraie.

On a : $U_{k+1} = \frac{2U_kV_k}{U_k+V_k}$ et $V_{k+1} = \frac{1}{2}(U_k + V_k)$.

On a par hypothèse $U_k > 0$ et $V_k > 0$, donc $\frac{2U_kV_k}{U_k+V_k} > 0$ et $\frac{1}{2}(U_k + V_k). > 0$.

On en déduit : $U_{k+1} > 0$ et $V_{k+1} > 0$, donc P(k+1) est vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$ et $V_n > 0$.

2.a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + V_n) - \frac{2U_nV_n}{U_n+V_n} = \frac{(U_n+V_n)^2-4U_nV_n}{2(U_n+V_n)} = \frac{(U_n-V_n)^2}{2(U_n+V_n)}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $(U_n - V_n)^2 \geq 0$ *et* $2(U_n + V_n) > 0$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} - U_{n+1} \geq 0$.

De plus, $V_0 - U_0 \geq 0$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n - U_n \geq 0$. Soit $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n \geq U_n$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{(V_n-U_n)}{(U_n+V_n)} \times \frac{1}{2}(V_n - U_n)$. Il nous reste à prouver que $\frac{(V_n-U_n)}{(U_n+V_n)} \leq 1$.

On a : $\frac{(V_n-U_n)}{(U_n+V_n)} - 1 = \frac{-2U_n}{U_n+V_n}$. comme $U_n > 0$ et $U_n + V_n > 0$, donc $\frac{-2U_n}{U_n+V_n} < 0$.

Ce qui donne : $\frac{(V_n-U_n)}{(U_n+V_n)} \leq 1$. En multipliant les membres de cette dernière inégalité par $\frac{1}{2}(V_n - U_n)$, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(V_n - U_n)$.

c) On obtient successivement :

$V_1 - U_1 \leq \frac{1}{2}(V_0 - U_0)$

$V_2 - U_2 \leq \frac{1}{2}(V_1 - U_1)$

……

$V_n - U_n \leq \frac{1}{2}(V_{n-1} - U_{n-1})$

En multipliant ces n inégalités de réels strictement positifs et après simplification, on obtient :

$V_n - U_n \leq (\frac{1}{2})^n(V_0 - U_0)$ or $V_0 - U_0 = 5$. Donc :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n - U_n \leq \frac{5}{2^n}$.

3. a) Démontrer que la suite (U_n) est croissante et que la suite (V_n) est décroissante.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{2}(V_n + U_n) - V_n = \frac{1}{2}(U_n - V_n)$. Or $U_n - V_n \leq 0$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} - V_n \leq 0$.

il en découle que la suite (V_n) est décroissante.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n = \frac{2U_nV_n}{U_n+V_n} - U_n = \frac{U_n(V_n-U_n)}{U_n+V_n}$. Or $V_n - U_n \geq 0$ et $\frac{U_n}{U_n+V_n} > 0$, donc :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n \geq 0$.

il en découle que la suite (U_n) est croissante.

b) ●La suite (U_n) est croissante, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq U_0$, or $V_n \geq U_n$ donc : $V_n \geq U_0$.

Donc la suite (V_n) est décroissante et minorée par U_0 . Par conséquent, la suite (V_n) est convergente.

●La suite (V_n) est décroissante, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n \leq V_0$, or $U_n \leq V_n$ donc : $U_n \leq V_0$.

Donc la suite (U_n) est croissante et majorée par V_0 . Par conséquent, la suite (U_n) est convergente.

c) On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq V_n - U_n \leq \frac{5}{2^n}$.

$\lim_{n\to+\infty} 5(\frac{1}{2})^n = 0$ car $\frac{1}{2} \in]-1;1[$. $Donc$, $\lim_{n\to+\infty}(V_n - U_n) = 0$

Par suite, les suites (U_n) et (V_n) ont la même limite.

4. a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1}U_{n+1} = \frac{1}{2}(V_n + U_n)\frac{2U_nV_n}{U_n+V_n} = V_nU_n$.

b) La suite (V_nU_n) est constante, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_nU_n = V_0U_0 = 36$.

Donc, $\lim_{n\to+\infty}(U_nV_n) = 36$. $Soit\ \ell^2 = 36. comme\ \ell \geq 0,\ \ell = 6.$

CHAPITRE 9

7 $u = 1 - i; v = 1 - i\sqrt{3}\ et\ w = \frac{u^5}{v^4}$.

1. $|u| = \sqrt{2}$. Soit $\theta = Arg(u)$. Donc $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .Ce qui entraine que $\theta = -\frac{\pi}{4}$.

$|v| = 2$. Soit $\alpha = Arg(v)$. Donc $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ et $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .Ce qui entraine que $\alpha = -\frac{\pi}{3}$.

$|w| = \frac{|u^5|}{|u^4|} = \frac{|u|^5}{|v|^4} = \frac{4\sqrt{2}}{16} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

On a : $w = \frac{u^5}{v^4}$. Donc il existe k appartenant à $\mathbb{Z}$ tel que $arg(w) = arg(u^5) - arg(v^4) + 2k\pi$.

$arg(w) = arg(u^5) - arg(v^4) + 2k\pi\ arg(w) = 5arg(u) - 4\,arg(v) + 2k\pi$

$arg(w) - \frac{5\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}2k\pi = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$. $Donc\ Arg(w) = \frac{\pi}{12}$.

2. $|u| = \sqrt{2}$ et $Arg(u) = -\frac{\pi}{4}$. Donc $u = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin(-\frac{\pi}{4})\right]$.

D'où : $u^5 = 4\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) + \sin(-\frac{5\pi}{4})\right] = 4\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \sin(\frac{3\pi}{4})\right]$

$u^5 = 4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4 + 4i|v^4| = 16$.

Il existe k appartenant à $\mathbb{Z}$ tel que : $arg(v^4) = 4\,arg(v) + 2k\pi = -\frac{4\pi}{3} + 2k\pi$. $Arg(v^4) = \frac{2\pi}{3}$.

Il en découle que $v^4 = 16\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}\right) = 16\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -8 + 8i\sqrt{3}$.

$w = \frac{-4+4i}{-8+8i\sqrt{3}}$.. Après calculs , on obtient $w = \frac{1+\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{3}-1}{8}i$.

On a : $w = \frac{1+\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{3}-1}{8}i$; $|w| = \frac{\sqrt{2}}{4}$ et $Arg(w) = \frac{\pi}{12}$. Donc $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{8}}{\frac{\sqrt{2}}{4}}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{8}}{\frac{\sqrt{2}}{4}}$.

Après calculs , on obtient : $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

9 $a = \sqrt{6} + \sqrt{2} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.

1. Après calculs , on obtient $a^2 = 8\sqrt{3} + 8i$.

2. $|a^2| = 16$.

Soit $\theta = Arg(a^2)$. Donc $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{1}{2}$ .Ce qui entraine que $\theta = \frac{\pi}{6}$.

<u>Déterminions le module et l'argument principal de a.</u>

$|a^2| = 16 \Leftrightarrow |a|^2 = 16 \Leftrightarrow |a| = 4$

Il existe k appartenant à $\mathbb{Z}$ tel que : $arg(a^2) = 2\,arg(a) + 2k\pi$.

$\arg(a^2) = 2\arg(a) + 2k\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} = 2\arg(a) + 2k\pi \Leftrightarrow \arg(a) = \frac{\pi}{12} - k\pi \Leftrightarrow$

$\text{Arg}(a) = \frac{\pi}{12}$ ou $\text{Arg}(a) = -\frac{11\pi}{12}$.

Soit $\alpha = \text{Arg}(a)$. Donc $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.D'où $\cos\alpha > 0$ et $\sin\alpha > 0$.

Par conséquent $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.Il en résulte que $\text{Arg}(a) = \frac{\pi}{12}$.

3.Soit n un nombre entier naturel.

a^n est un nombre imaginaire pur $\Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\arg(a^n) = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

$\arg(a^n) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow n \times \arg(a) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \frac{n\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \frac{n}{12} = \frac{1}{2} + k \Leftrightarrow n = 6 + 12k$.

Par conséquent a^n est un nombre imaginaire pur $\Leftrightarrow$ il existe k appartenant à $\mathbb{N}$ tel que $n = 6 + 12k$.

Les nombres entiers naturels tels que a^n est un nombre imaginaire pur sont donc les entiers naturels $6 + 12k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

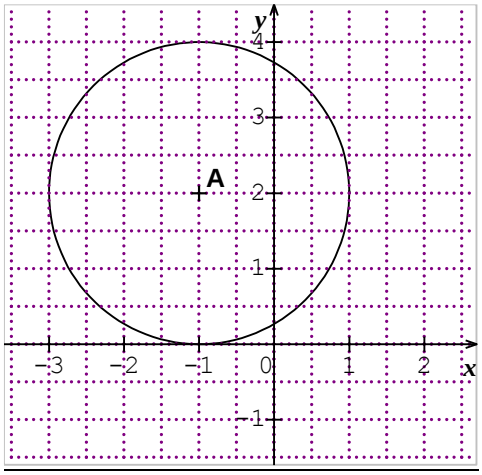
10 Soit M un point du plan d'affixe z.

a)$M \in (E) \Leftrightarrow (z + 1 - 2i)(\bar{z} + 1 + 2i) = 4 \Leftrightarrow (z + 1 - 2i)(\overline{z + 1 - 2i}) = 4 \Leftrightarrow |z + 1 - 2i|^2 = 4$

$\Leftrightarrow |z + 1 - 2i| = 2 \Leftrightarrow |z - (-1 + 2i)| = 2$. Soit A le point du plan d'affixe $-1 + 2i$.

Donc $M \in (E) \Leftrightarrow |z_M - z_A| = 2 \Leftrightarrow AM = 2 \Leftrightarrow$ M appartient au cercle de centre A et de rayon 2.

D'où (E) est le cercle de centre A et de rayon 2.

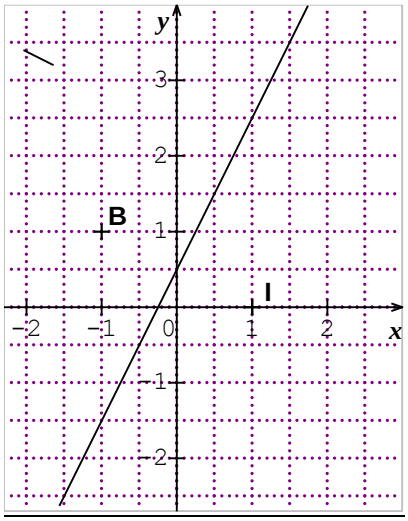


c) $M \in (E) \Leftrightarrow |z - 1| = |z + 1 - i| \Leftrightarrow |z - 1| = |z - (-1 + i)|$

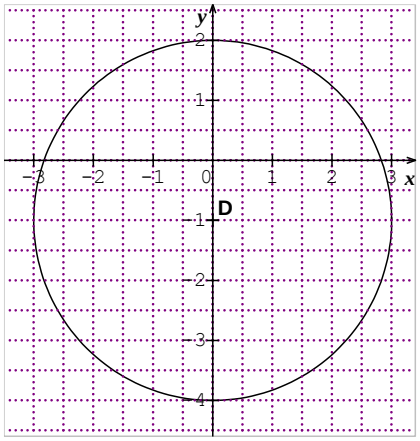
Soit B le point du plan d'affixe $-1 + i$.

Donc $M \in (E) \Leftrightarrow |z_M - z_I| = |z_M - z_B| \Leftrightarrow IM = BM \Leftrightarrow$ M appartient à la médiatrice de [IB].

D'où (E) est la médiatrice de [IB].



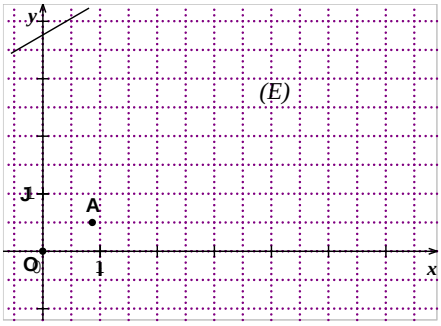
d) $M \in (E) \Leftrightarrow \left|\left(\sqrt{3}-i\right)z+1+i\sqrt{3}\right| = 6 \Leftrightarrow \left|\left(\sqrt{3}-i\right)\left(z+\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}\right|\right. = 6 \Leftrightarrow \left|\sqrt{3}-i\right| \times |z+i| = 6 \Leftrightarrow$
$2|z+i| = 6 \Leftrightarrow |z+i| = 3 \Leftrightarrow |z-(-i)| = 3$. Soit D le point du plan d'affixe $-i$.
Donc, $M \in (E) \Leftrightarrow |z_M - z_D| = 3 \Leftrightarrow$ M appartient au cercle de centre D et de rayon 3 .D'où (E) est le cercle de centre D et de rayon 3.



11 Soit M un point du plan d'affixe z.

a) $M \in (E) \Leftrightarrow \text{Arg}(z) = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}}) = \frac{\pi}{6}$ .Donc (E) est une demi-droite d'origine O privée de O.

Soit A un point du plan tel que $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}}) = \frac{\pi}{6}$. Donc (E) est la demi –droite $[OA)$ privée de O.



b)$M \in (E) \Leftrightarrow \text{Arg}(\bar{z}) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow -\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \text{Arg}(z) = -\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}}) = -\frac{\pi}{3}$

Donc (E) est une demi-droite d'origine O privée de O.

Soit B un point du plan tel que $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}}) = -\frac{\pi}{3}$.

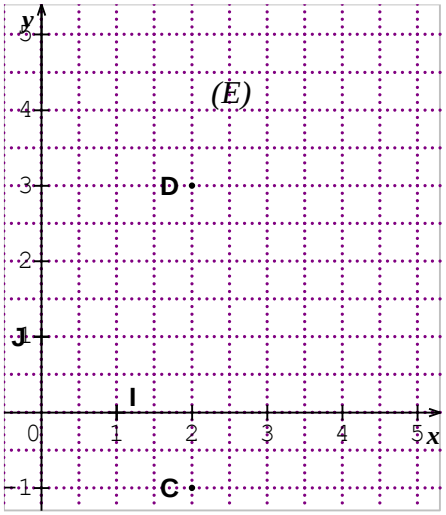
Donc , (E) est la demi –droite [OB) privée de O.

c)$M \in (E) \Leftrightarrow \text{Arg}(z - 2 + i) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \text{Arg}[z - (2 - i)] = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{CM}}) = \frac{\pi}{2}$ où C(2-i).

D'où (E) est une demi –droite d'origine C privée de C.

Soit D un point du plan tel que $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{CD}}) = \frac{\pi}{2}$.

(E) est la demi-droite d'origine C, passant par D et privée de C.



d) $M \in (E) \Leftrightarrow \text{Arg}(iz + 2) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\arg(iz + 2) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$.

$\Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\arg[i(z - 2i)] = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$\Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\arg(i) + \arg(z - 2i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$\Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{\pi}{2} + \arg(z - 2i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$\Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\arg(z - 2i) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

Soit K le point du plan d'affixe 2i.

Donc , M ∈ (E) $\Leftrightarrow \text{Arg}(z_M - z_K) = -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{KM}}) = -\frac{\pi}{4}$

Soit F un point du plan tel que $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{KF}}) = -\frac{\pi}{4}$.

D'où (E) est la demi –droite d'origine K, passant par F et privée de K.

20 a) Soit(E)l'équation: $z\epsilon\mathbb{C}$; $z^3 + (4-5i)z^2 + (8-20i)z - 40i = 0$.

Considérons le polynôme P(z) tel que $P(z) = z^3 + (4-5i)z^2 + (8-20i)z - 40i$.

Recherche d'une solution imaginaire pure de (E).

Soit x un nombre réel.

$P(ix) = (ix)^3 + (4-5i)(ix)^2 + (8-20i)(ix) - 40i = -4x^2 + 20x + i(-x^3 + 5x^2 + 8x - 40)$.

$P(ix) = 0 \Leftrightarrow (E) \Leftrightarrow -4x^2 + 20x + i(-x^3 + 5x^2 + 8x - 40) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -4x^2 + 20x = 0 \quad (1) \\ -x^3 + 5x^2 + 8x - 40 = 0 \ (2) \end{cases}$.

$(1) \Leftrightarrow -4x(x-5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ ou \ x = 5$.

On a : $-0^3 + 5 \times 0^2 + 8 \times 0 - 40 = -40$ et $-40 \neq 0$. Donc 0 n'estpas solution de (2)

$-5^3 + 5 \times 5^2 + 8 \times 5 - 40 = 0$. Donc 5 estsolutionde(2). On en déduit que $P(ix) = 0 \Leftrightarrow x = 5$.

Par conséquent la solution imaginaire pure de (E) est 5i.

Résolution de (E).

5i une solution de (E). Donc 5i est un zéro de P(z). D'où il existe trois nombres complexes a, b, c tels que $P(z) = (z-5i)(az^2 + bz + c)$.

$P(z) = (z-5i)(az^2 + bz + c) \Leftrightarrow P(z) = az^3 + (b-5ia)z^2 + (c-5ib)z - 5ic$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - 5ia = 4 - 5i \\ c - 5ib = 8 - 20i \\ -5ic = -40i \end{cases} \Leftrightarrow a = 1, b = 4 \text{ et } c = 8.$$

Par suite $P(z) = (z-5i)(z^2 + 4z + 8)$.

$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-5i)(z^2 + 4z + 8) = 0 \Leftrightarrow z - 5i = 0$ ou $z^2 + 4z + 8 = 0$.

- $z - 5i = 0 \Leftrightarrow z = 5i$.
- $z^2 + 4z + 8 = 0$.

$\Delta = -16 = 16i^2 = (4i)^2$. Une racine carrée de Δ est donc 4i.

$z_1 = \frac{-4-4i}{2} = -2 - 2i$ et $z_2 = \frac{-4+4i}{2} = -2 + 2i$.

L'ensemble des solutions de (E) est $\{5i, -2-2i, -2+2i\}$.

21 b) Soit(E)l'équation: $z\epsilon\mathbb{C}$, $z^3 - 2iz^2 + 4(1+i)z + 16 + 16i = 0$.

Considérons le polynôme P(z) tel que $P(z) = z^3 - 2iz^2 + 4(1+i)z + 16 + 16i$.

Recherche d'une solution imaginaire réelle de (E).

Soit x un nombre réel.

$P(x) = x^3 - 2ix^2 + 4(1+i)x + 16 + 16i = x^3 + 4x + 16 + i(-2x^2 + 4x + 16)$.

$P(x) = 0 \Leftrightarrow (E) \Leftrightarrow x^3 + 4x + 16 + i(-2x^2 + 4x + 16) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 4x + 16 = 0 \quad (1) \\ -2x^2 + 4x + 16 = 0 \ (2) \end{cases}$$

La résolution de l'équation (2) donne $x = 4$ ou $x = -2$.

On a : $4^3 + 4 \times 4 + 16 = 96$ et $96 \neq 0$. Donc 4 n′estpas solution de (1)
$(-2)^3 + 4 \times (-2) + 16 = 0$. Donc -2 estsolutionde(1).
Par conséquent la solution réelle de (E) est -2.

Résolution de (E).
-2 une solution de (E). Donc -2 est un zéro de P(z).D'où il existe trois nombres complexes a, b, c tels que $P(z) = (z + 2)(az^2 + bz + c)$.
$P(z) = (z + 2)(az^2 + bz + c) \Leftrightarrow P(z) = az^3 + (b + 2a)z^2 + (c + 2b)z + 2c$.
Une identification terme à terme donne a = 1, $b = -2 - 2i$ et $c = 8 + 8i$.
Il vient : $P(z) = (z + 2)[z^2 + (-2 - 2i)z + 8 + 8i]$.
$P(z) = 0 \Leftrightarrow = (z + 2)[z^2 + (-2 - 2i)z + 8 + 8i] = 0 \Leftrightarrow z + 2 = 0$ ou $z^2 + (-2 - 2i)z + 8 + 8i = 0$.

- $z + 2 = 0 \Leftrightarrow z = -2$.
- $z^2 + (-2 - 2i)z + 8 + 8i = 0$.
  $\Delta = -32 - 24i$. $|\Delta| = 40$
  Soit $\delta = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, une racine carrée de Δ.

Donc $\begin{cases} x^2 + y^2 = 40 \ (1) \\ x^2 - y^2 = -32 \ (2) \\ 2xy = -24 \ (3) \end{cases}$
$(1) + (2) \Rightarrow x^2 = 4$
$\Rightarrow x = -2 \ ou \ x = 2$
$(1) - (2) \Rightarrow y^2 = 36$
$\Rightarrow y = -6 \ ou \ y = 6$
$(3) \Rightarrow xy < 0$
$\Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 6 \end{cases} ou \begin{cases} x = 2 \\ y = -6 \end{cases}$
Choisissons $\delta = -2 + 6i$.
$z_1 = \frac{2+2i-2+6i}{2} = \frac{8i}{2} = 4i$ et $z_2 = \frac{2+2i+2-6i}{2}) = \frac{4-4i}{2} = 2 - 2i$.
L'ensemble des solutions de (E) est $\{-2; 4i; 2 - 2i\}$.

CHAPITRE 10

1 a) $z' = -z + 7 + 2i$ est l'écriture complexe d'une symétrie centrale .
Donc F est une symétrie centrale. Déterminons son centre Ω(ω)
On a F(Ω) = Ω ⇔ ω = - ω + 2 – 6i ⇔ 2 ω = 2 – 6i ⇔ ω = 1 -3i
Ainsi, F est la symétrie centrale de centre Ω(1 – 3i).
b) $z' = -3z + 1 + 5i$ est l'écriture complexe d'une homothétie de rapport -3.
Déterminons son centre Ω(ω).
F(Ω) = Ω ⇔ $\omega = -3\omega + 1 + 5i \Leftrightarrow 4\omega = 1 + 5i \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{4} + \frac{5}{4}$.

Ainsi, F est l'homothétie de centre $\Omega(\frac{1}{4}+\frac{5}{4}i)$ et de rapport -3.

c) L'écriture complexe $z' = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}z + 1$ équivaut à $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}z + 1$. Donc est une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Déterminons son centre $\Omega(\omega)$.

On a : $\omega = (\frac{-1+i\sqrt{3}}{2})\,\omega + 1 \iff \omega(1 - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}) = 1 \iff \omega = \frac{2}{3-i\sqrt{3}} = \frac{3+i\sqrt{3}}{6}$

Ainsi, F est la rotation de centre $\Omega(\frac{3+i\sqrt{3}}{6})$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

4 1.L'écriture complexe de S est de la forme : $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

$\begin{cases} S(A) = D \\ S(J) = J \end{cases} \iff$

La résolution du système, donne : a = 1 + i et b = 1.

Ainsi, l'écriture complexe de S est : $z' = (1+i)z + 1$.

Soit k le rapport de S et θ son angle.

$k = |1 + i| = \sqrt{2}$.

$\begin{cases} cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ donc $\theta = \frac{\pi}{4}$.

2. Les points $J(0;1)$et $I(1;0)$ appartiennent à la droite d'équation $y = -x + 1$.

Soit $I' = S(I)$.

$z_{I'} = (1+i)(1) + 1 = 2 + i$.

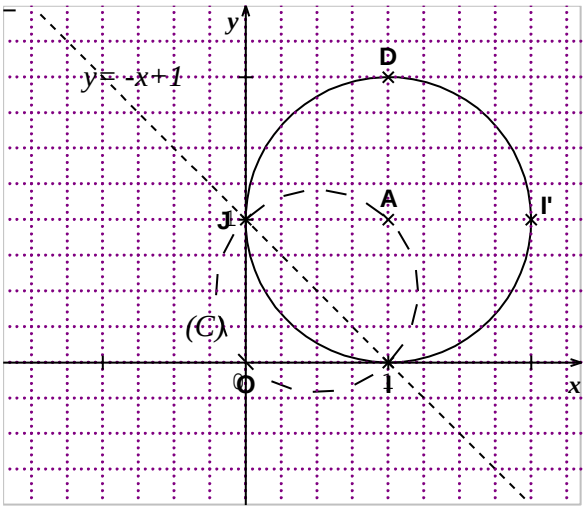
$S(J) = J$.

Par suite l'image de la droite d'équation $y = -x + 1$ est la droite $(I'J)$.

3. Déterminons l'affixe du point $O' = S(O)$. On a $z_{O'} = (1+i)(0) + 1 = 1$ donc $z_{O'} = z_I$ d'où $O' = I$.

$S(A) = D$ et $S(O) = I$ donc l'image par S du cercle (C)de diamètre $[AO]$est le cercle de diamètre$[DI]$.

Figure



5 BAC 2000

1. L'écriture complexe de S est $z' = \frac{3-i\sqrt{3}}{2}z - \sqrt{3} + i$. ; $z_A = \sqrt{3} + i$ et $z_B = -\sqrt{3} + i$.

Déterminons l'image de O par S.

On a : $\frac{3-i\sqrt{3}}{2}z_O - \sqrt{3} + i = -\sqrt{3} + i = z_B$. Donc l'image de O par S est B.

Déterminons l'image de A par S.

On a : $\frac{3-i\sqrt{3}}{2}z_A - \sqrt{3} + i = \sqrt{3} + i = z_A$. Donc l'image de A par S est A.

2. $\frac{3-i\sqrt{3}}{2} \neq 1$. Donc S est caractérisée par son centre, son rapport k et son angle θ.

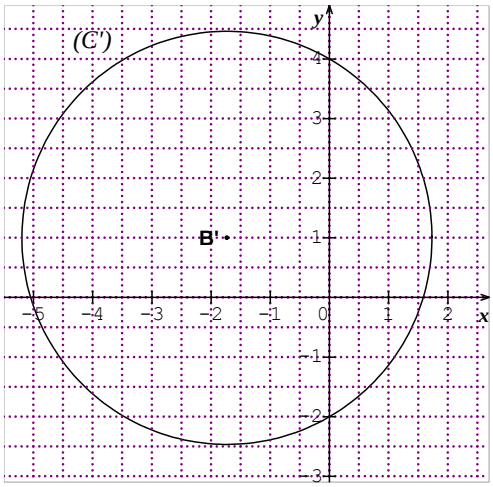
L'image de A par S est A. Donc A est le centre de S .

$k = \left|\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{3}$. $\theta = \text{Arg}\left(\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right)$. Donc $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{1}{2} \end{cases}$. Donc $\theta = -\frac{\pi}{6}$.

3.a) (C) est le cercle de centre O et de rayon 2.

L'image de O par S est B . Donc (C′) est le cercle de centre B et de rayon $2\sqrt{3}$.

b) Construction de (C′)



6 1.L'écriture complexe de S est $z' = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et $z_A = 2$.

On a : $\frac{3+i\sqrt{3}}{4}z_A + \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = 2 = z_A$. Donc l'image de A par S est A.

2. P est l'antécédent de O par S. Donc l'image de P par S est O. Par conséquent :

$\frac{3+i\sqrt{3}}{4}z_P + \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = z_O$. D'où $\frac{3+i\sqrt{3}}{4}z_P + \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = 0$ .Ce qui donne $z_P = \frac{2\sqrt{3}}{3}i$.

P est le point d'affixe $\frac{2\sqrt{3}}{3}i$.

3. L'écriture complexe de S est $z' = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{3+i\sqrt{3}}{4} \neq 1$.

Donc S est caractérisée par son centre, son rapport k et son angle θ.

l'image de A par S est A. Donc A est le centre de S .

$k = \left|\frac{3+i\sqrt{3}}{4}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. $\theta = \text{Arg}\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right)$. Donc $\begin{cases}\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2}\end{cases}$ .Donc $\theta = \frac{\pi}{6}$

4. a) Soit M un point du plan distinct de A. Donc $z \neq 2$.

Calculons $\frac{z'-z}{z'-z_A}$.

On a : $z' - z = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2} - z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{4}(z-2)$.

$z' - z_A = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2} - 2 = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z - \frac{3+i\sqrt{3}}{2} = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}(z-2)$.

On en déduit après calculs que $\frac{z'-z}{z'-z_A} = \frac{\sqrt{3}}{3}i.\frac{z'-z}{z'-z_A}$ est un nombre imaginaire pur non nul . Donc AMM' est un triangle rectangle en M'.

b) E' est l'image de E par S. D'après la question 4.a) AEE' est un triangle rectangle en E'. D'où E' appartient au cercle de diamètre [AE]. Par ailleurs , $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AE'}}) = \frac{\pi}{6}$. Donc E' appartient à la demi-droite [AX) privée de A telle que $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AX}}) = \frac{\pi}{6}$. On en déduit la construction de E'.

12 1. On a $|z_A| = 4$ et $Arg(z_A) = \arg(4i) = \frac{\pi}{2}$.

$|z_B| = \sqrt{12+4} = 4$; soit $\theta_B = Arg(z_B)$, on a : $\begin{cases}\cos(\theta_B) = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta_B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\end{cases}$. Donc $\theta_B = \frac{\pi}{6}$.

$|z_C| = \sqrt{12+4} = 4$; soit $\theta_C = Arg(z_C)$, on a : $\begin{cases}\cos(\theta_C) = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta_c) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\end{cases}$ donc $\theta_c = \frac{5\pi}{6}$.

2. $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 4$ donc les points A, B et C appartiennent au cercle C(O ;4). On place ainsi A, B et C en utilisant aussi leurs arguments. Voir figure ci-dessous.

3. On a : $\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = \frac{2\sqrt{3}+2i}{4i} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ donc le triangle OBA est équilatéral.

4. On a $z_{\overrightarrow{OC}} = -2\sqrt{3} + 2i$ et $z_{\overrightarrow{BA}} = 4i - 2\sqrt{3} - 2i = - - 2\sqrt{3} + 2i$ donc $z_{\overrightarrow{OC}} = z_{\overrightarrow{BA}}$.

Ainsi $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BA}$, d'où $OBAC$ est un parallélogramme.

$OB = BA$ (car le triangle OBA est équilatéral), par conséquent $OBAC$ est un losange.

5.a) l'écriture complexe de S est de la forme $z' = az + b$.

On a $S(O) = O$ donc $b = 0$ d'où l'écriture complexe de S est de la forme $z' = az$.

$S(B) = K$ donc $z_K = az_B$ d'où $a = \frac{z_K}{z_B} = \frac{2i}{2\sqrt{3}+2i} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (car$z_K = \frac{z_A+z_O}{2} = 2i$).

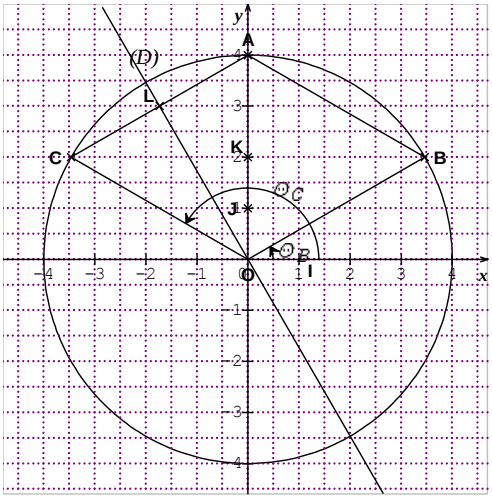
Il en découle que l'écriture complexe de S est $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$.

b) on a $z_L = \frac{z_A+z_C}{2} = \frac{4i-2\sqrt{3}+2i}{2} = -\sqrt{3} + 3i$. Soit $L' = S(L)$.

On a $z_{L'} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\sqrt{3} + 3i\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3i}{2} - \frac{3i}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3}$.

c) on a$|z_A| = |z_B|$ donc $OA = OB$, par suite O $\in (D)$.

Comme $L' \in (D)$, alors l'image de la droite (D) par S est la droite (OL'). Or $z_{L'} \in$ IR donc $L' \in (OI)$. On en déduit que les droites $(OL')et\ (OI)$ sont confondues d'où l'image de la droite (D) par S est la droite (OI).



CHAPITRE 11

4 1. Cette expérience aléatoire consiste à sélectionner au hasard un morceau parmi 10. Soit Ω l'univers de cette expérience aléatoire et p la probabilité, pour chacun des morceaux d'être sélectionné. On a $Card(\Omega) = 10$ donc $p = \frac{1}{10}$.

2.a) il y a 3 morceaux d'une durée d'écoute de 240 seconde donc $Card(E_1) = 3$ d'où $P(E_1) = \frac{3}{10}$.

b) $Card(E_2) = 8$ d'où $P(E_2) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.

3. a) les valeurs prises par X sont : 200 ; 240 ; 260 ; 280.

Ainsi $P(X = 200) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$; $P(X = 240) = \frac{3}{10}$; $P(X = 260) = \frac{1}{10}$; $P(X = 280) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

X	200	240	260	280
P(X = x)	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$

b) $E(X) = \sum x_i\, p_i = 200 \times \frac{1}{5} + 240 \times \frac{3}{10} + 260 \times \frac{1}{10} + 280 \times \frac{2}{5} = 250.$

$V(X) = \sum {x_i}^2\, p_i - E(X)^2 = 900$. Donc $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 30.$

5 Tableau à double entrée

	Dé B					
	1	1	1	3	3	5

Dé A	1	2	2	2	4	4	6
	2	3	3	3	5	5	7
	3	4	4	4	6	6	8
	4	5	5	5	7	7	9
	5	6	6	6	8	8	10
	6	7	7	7	9	9	11

Les valeurs prises par S sont : 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11.

Le tableau suivant donne la loi de probabilité de S.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_i	$\frac{3}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

$E(X) = \sum x_i\, p_i = \frac{210}{36} = \frac{35}{6}$.

7 1. Notons A l'événement : << Le joueur récupère sa mise >>.

L'événement A est réalisé si le joueur tire le médaillon numéroté 4. Sur les 6 médaillons, un seul est numéroté 4. Donc : P(A) = $\frac{1}{6}$.

2. Notons B l'événement : << Le joueur perd 1500F et perd aussi sa mise >>.

L'événement B est réalisé si le joueur tire le médaillon numéroté 5 au 1er tirage et un jeton qui n'est pas numéroté 5 au 2e tirage. Donc : P(B) = $\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$.

3.a) Notons C, D et E les événements :

C : << Le joueur perd sa mise et ne gagne rien >> ;

D : << Le joueur ne gagne rien mais récupère sa mise >> ;

E : << joueur gagne 2000F et perd sa mise >>.

L'événement C est réalisé si le joueur tire le médaillon numéroté 1, 2 ou 6. On a donc : P(C) = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

L'événement D est réalisé si le joueur tire le médaillon numéroté 3. On a donc : P(D) = $\frac{1}{6}$.

L'événement E est réalisé si le joueur tire le médaillon numéroté 5 au 1er tirage et un jeton numéroté 5 au 2e tirage. Donc : P(E) = $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

On obtient donc :

$X = x_i$	$-S$	$-S - 1500$	0	$-S + 2000$	3000
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$

b) L'espérance mathématique de X est :

$E(X) = -S \times \left(\frac{1}{2}\right) + (-S - 1500) \times \frac{5}{36} + 0 \times \frac{1}{6} + (-S + 2000) \times \frac{1}{36} + 3000 \times \frac{1}{6}$

$E(X) = \left(-\frac{1}{2} - \frac{5}{36} - \frac{1}{36}\right)S + \left(-\frac{7500}{36} + \frac{2000}{36} + \frac{3000}{6}\right)$

$E(X) = -\frac{2}{3}S + \frac{3125}{9}$.

c) Le résultat financier moyen est nul $\Leftrightarrow E(X) = 0$.

$E(X) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}S + \frac{3125}{9} = 0 \Leftrightarrow S = \frac{3\times3125}{2\times9} = \frac{3125}{6} \approx 521$ à l'unité près.

Ce qui signifie que le résultat financier moyen est nul si la mise du joueur est 521 F.

10 1. a) Notons C l'événement : << Obtenir le numéro 2 >>.

Sur le dé A, il y a 2 faces numérotées 2. Donc : $P(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

b) Notons D l'événement : << Obtenir le nombre 421 >>. $P(D) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{108}$.

2. Ici on lance 3 fois de suite le dé B. Donc : $P(D) = \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{54}$.

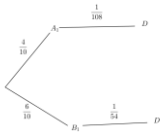
3. a) Notons A_1 l'événement : << Tirer le dé A >> et B_1 l'événement : << Tirer le dé B >>.

On a : $P(A_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ et $P(B_1) = \frac{3}{5}$.

La probabilité que d'obtenir le nombre 421 sachant qu'on a tiré le dé A est : $P\left(D/A_1\right) = \frac{1}{108}$.

La probabilité que d'obtenir le nombre 421 sachant qu'on a tiré le dé B est : $P\left(D/B_1\right) = \frac{1}{54}$

Utilisons un arbre pondéré :



D'où la probabilité d'obtenir 421 est : $P(D) = P(D \cap A_1) + P(D \cap B_1)$.

On a $P(D \cap A_1) = P(A_1) \times P\left(D/A_1\right) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{108} = \frac{1}{270}$.

On a $P(D \cap A_1) = P(A_1) \times P\left(D/A_1\right) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{108} = \frac{1}{270}$.

On a $P(D \cap B_1) = P(B_1) \times P\left(D/B_1\right) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{54} = \frac{3}{270}$.

Donc : $P(D) = \frac{4}{270} = \frac{2}{135}$.

b) Sachant que Egny a obtenu 421 ; la probabilité qu'il ait joué avec un dé du type A est $P\left({}^{A_1}/_{D}\right) = \frac{P(D\cap A_1)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{270}}{\frac{2}{135}} = \frac{1}{4}$.

11 1.a) L'univers Ω est l'ensemble des combinaisons de 5 sacs choisis parmi 60. Donc : Card(Ω) $= C_{60}^5 = 5461512$.
Soit A l'événement << exactement 2 des 5 sacs contrôlés contiennent le produit non déclaré >>.
Pour réaliser A, il faut choisir 2 sacs parmi 10 et 3 sacs parmi 50.
Donc Card(A) = $C_{10}^2 \times C_{50}^3$. Donc : P(A) = $\frac{C_{10}^2 \times C_{50}^3}{C_{60}^5} = \frac{5250}{32509} \approx 0{,}2$.
b) Soit B l'événement << l'un au moins des sacs contrôlés contient le produit non déclaré >>.
L'événement contraire $\overline{B}$<< aucun des sacs contrôlés ne contient le produit non déclaré >>.
Pour réaliser $\overline{B}$, il faut choisir 5 sacs parmi 50. Donc P($\overline{B}$) = $\frac{C_{50}^5}{C_{60}^5} = \frac{37835}{97527}$.
P(B) = 1 $-$P($\overline{B}$) = $1-\frac{37835}{97527} = \frac{59692}{97527} \approx 0{,}6$.
2. i) a) la loi de probabilité de X.
Les valeurs possibles de X sont : 0 ; 10000 ; 20000 ; 30000.
Soit X' le nombre de fois où le produit non déclaré est découvert. Nous sommes en présence d'un schéma de Bernoulli de paramètres n = 3 et p = 0,6.
D'où la loi de probabilité de X' est : P(X' = k) = $C_3^k(0{,}6)^k(0{,}4)^{3-k}$ avec $0 \leq k \leq 3$.
L'événement (X' = 0) est (X = 0) ;
L'événement (X' = 1) est (X = 10000) ;
L'événement (X' = 2) est (X = 20000) ;
L'événement (X' = 3) est (X = 30000) .
On obtient ainsi la loi de probabilité de X :

x_i	0	10000	20000	30000
P(X = x_i)	0,064	0,288	0,432	0,216

i)b) E(X) = 10000×0,288 + 20000×0,432 + 30000×0,216 = 18000.
ii) La probabilité pour que son chargement soit saisi est : 0,288 + 0,432 + 0,216 = 0,936 ≈ 0,9.

12 1. Cette expérience aléatoire consiste à tirer un billet au hasard parmi 1000.
Soit Ω l'univers de cette expérience aléatoire. On a $\text{card}(\Omega) = 1000$.
● Les tickets se terminant par 05 sont 10 car il ya 10 possibilités pour le premier chiffre. Ceux se terminant par 42 sont aussi 10 et ceux se terminant par 70 sont 10.
Ainsi $\text{card}(G) = 30$ d'où $P(G) = \frac{30}{1000} = \frac{3}{100}$.
● L'événement contraire de O, $\overline{O}$ est l'évènement « son billet porte un numéro ne contenant pas de zéro ». il s'agit de former triplet avec les 9 autres chiffres. Ainsi $\text{card}(\overline{O}) = 9^3 = 729$ d'où $P(\overline{O}) = \frac{729}{1000}$.
Par suite $P(O) = \frac{271}{1000}$.
2. Il s'agit de $P(G/O)$. On sait que $P(G/O)=\frac{P(G\cap O)}{P(O)}$.

Calculons P(G ∩ O).
Les 10 tickets gagnants terminant 05 contiennent tous au moins un zéro ainsi que 10 se terminant par 70.
Parmi les billets gagnants se terminant par 42 seul le 042 contient un 0.

Finalement $\text{card}(G \cap O) = 21$ d'où $P(G \cap O) = \frac{21}{1000}$. Ainsi $P\left(\frac{G}{O}\right) = \frac{\frac{21}{1000}}{\frac{271}{1000}} = \frac{21}{271}$.

3. $P(G/O) \neq P(G)$ donc les évènements G et O ne sont pas indépendants.

17 Soit D l'évènement « la pièce fabriquée est défectueuse »
A est l'évènement « la pièce est acceptée ».

1. On a $P(D) = \frac{1,8}{100} = 0,018.$

2.a) il s'agit de $P(A \cap D)$.
On a : $P(A/D)$=0,01
$P(A \cap D) = P(A/D) \times P(D) = 0,01 \times 0,018 = 0,00018.$

b) Il s'agit de $P(\bar{A} \cap \bar{D})$.
On a: $P(\bar{A}/\bar{D})$ = 0,03
$P(\bar{A} \cap \bar{D}) = P(\bar{A}/\bar{D}) \times P(\bar{D})$ = $0,03 \times 0,982 = 0,02946.$

c) Notons E l'événement << il y a erreur de contrôle >>.
E = $(A \cap D) \cup (\bar{A} \cap \bar{D})$. On a $(A \cap D) \cap (\bar{A} \cap \bar{D}) = \emptyset$.
Donc P(E) = $P(A \cap D) + P(\bar{A} \cap \bar{D}) = 0,02964.$

3. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre d'erreurs au cours des 5 contrôles. X est une loi binomiale de paramètre $n = 5$ et $p = 0,02964$.
Ainsi la probabilité cherchée est $P(X = 2) = C_5^2(0,02964)^2(1 - 0,02964)^3 = 0,008027$

18 PARTIE A

1. Chaque code est un 4-uplets d'éléments pris parmi les 10 chiffres du système décimal.
Le nombre de 4-uplets est donc $10^4 = 10000$.
La banque peut distribuer à ses clients 10000 cartes magnétiques.

2. Soit A l'événement << le code d'une carte magnétique commence par 0 >>.
Chaque élément de A est un 3-uplets d'éléments pris parmi les 10 chiffres du système décimal.
Donc Card(A) = 10^3. Donc P(A) = $\frac{10^3}{10^4} = \frac{1}{10}$.

3. Soit B l'événement << le code d'une carte magnétique soit composé des chiffres 2 ; 4 ; 5 ; 7 >>.
Chaque élément de B est une permutation des chiffres 2 ;4 ;5 ;7.
Donc Card(B) = 4! = 24. Donc P(B) = $\frac{24}{10^4} = \frac{3}{1250}$.

PARTIE B

1. a) Il y a 1 chance sur 24 de retirer de l'argent au premier essai . Donc P(E) = $\frac{1}{24}$.

b) Il y a 23 chance sur 24 d'échouer au premier essai et 1 chance sur 23 de retirer de l'argent au deuxième essai. Donc P(F) = $\frac{23}{24} \times \frac{1}{23} = \frac{1}{24}$.

2. G = E U F et E∩ F = ∅. Donc P(G) = $\frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{12}$

3. La probabilité qu'il ait effectué le retrait au premier essai sachant qu'il a pu retirer de l'argent au guichet automatique est P(E/G).

On a P(E/G) = $\frac{P(E\cap G)}{P(G)} = \frac{P(E)}{P(G)} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{12}} = \frac{1}{2}$.

4. La banque prélève une taxe pour chaque essai de retrait au guichet automatique. Cette taxe s'élève à 30 francs par essai fructueux et à 60 francs par essai infructueux.

X désigne la variable aléatoire qui détermine la taxe totale à payer sur l'ensemble des essais faits par Monsieur Koné.

a) Les éventualités sont : E, (E,F), (F,F).

P(X= 30) = P(E) = $\frac{1}{24}$; P(X = 90) = P(E,F) = P(F) = $\frac{1}{24}$;P(X= 120) = P(F,F) = 1- $\frac{1}{12} = \frac{11}{12}$.

La loi de probabilité de X est :

x_i	30	90	120
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{11}{12}$

b) E(X) = 30× $\frac{1}{24}$+ 90× $\frac{1}{24}$+ 120× $\frac{11}{12}$= 115.

L'espérance mathématique de X est égale à 115 francs.

26 **1.** D'après l'énoncé $P(G) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5} = 0{,}4$ et $P(W/G) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

2. Il s'agit de $P(G \cap W)$.

$P(G \cap W) = P(W/G) \times P(G) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$.

3. On sait que $P(W/\bar{G}) = \frac{P(W\cap\bar{G})}{P(\bar{g})}$. On a$P(W) = P(W \cap G) + P(W \cap \overline{G})$ donc

$P(W \cap \bar{G}) = P(w) - P(W \cap G) = \frac{7}{10} - \frac{6}{25} = \frac{23}{50}$. D'où $P(W/\bar{G})$=$\frac{\frac{23}{50}}{\frac{3}{5}} = \frac{23}{30}$.

4. Il s'agit de $P(\bar{G}/W)$.

$P\left(\frac{\bar{G}}{W}\right)$=$\frac{P(W\cap\bar{G})}{P(w)}$=$\frac{\frac{23}{50}}{\frac{7}{10}} = \frac{23}{35}$.

5.a) Les valeurs prises par X sont :0 ; 4200 ; 8400 ; 12600.

Loi de probabilité de X:

$P(X = 0) = P(\bar{G} \cap \bar{W}) = P(\bar{G}) - P(\bar{G} \cap W) = \frac{3}{5} - \frac{23}{50} = \frac{7}{50}$;

$P(X = 4200) = P(W \cap \bar{G}) = \frac{23}{50}$;

$P(X = 8400) = P(G \cap \bar{W}) = P(G) - P(G \cap W) = \frac{2}{5} - \frac{6}{25} = \frac{4}{25}$;

$P(X = 12600) = P(G \cap W) = \frac{6}{25}$.

$b)$ $E(X) = \sum x_i\, p_i = 0 \times \frac{7}{50} + 4200 \times \frac{23}{50} + 8400 \times \frac{4}{25} + 12600 \times \frac{6}{25} = 6300.$

Le fabriquant dépense en moyenne 6300F pour intégrer le GPS ou le WIFI a chaque téléphone portable.

BACCALAUREAT D DE 2008 à 2016

SESSION 2008	……..……	323
SESSION 2009	……..……	325
SESSION 2010	……	327
SESSION 2011(c)	……..……	329
SESSION 2012 (c)	……	331
SESSION 2013 (c)	……..……..…	333
SESSION 2014	…… ……	335
SESSION 2015	……	336
SESSION 2016 (c)	……	339

Sujet 1 : Session 2008

Exercice 1

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

On considère l'équation (E) : $z \in \mathbb{Z}$, $z^3 + (6 - 5i)z^2 + (1 - 20i)z - 14 - 5i = 0$.

1. a) Vérifier que i est une solution de l'équation (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + (6 - 4i)z + 5 - 14i = 0$.

c) Résoudre à l'aide des questions qui précèdent l'équation (E).

2. On considère les points A, B, et D d'affixes respectives u = i ; v = -2 + 3i et t = -4 + i.

a) Placer les points A, B et D dans le repère.

b) Ecrire le nombre complexe $Z = \frac{u - v}{t - v}$ sous forme trigonométrique.

c) En déduire que le triangle ABD est rectangle isocèle en B.

3. Soit S la similitude directe de centre A qui transforme D en B. B' est l'image de B par S.

a) Justifier que le triangle ABB' est rectangle isocèle en B'.

b) En déduire la construction du point B'.

4. a) Déterminer l'écriture complexe de S.

b) Calculer l'affixe de B'.

Exercice 2

Le tableau ci-dessous donne les notes sur 20 obtenues en mathématiques et en sciences physiques par huit candidats de la série D au baccalauréat 2005. X_i est la note de mathématiques, Y_i la note en sciences physiques.

X_i	4	6	7	9	11	14	12	17
Y_i	3	4	6	8	10	12	9	14

1. Représenter graphiquement le nuage de points associé à cette série statistique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 1 cm.

2. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage puis le placer dans le repère.

3. a) Vérifier que la covariance cov(X, Y) de la série statistique est égal à $\frac{57}{4}$.

b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.

4. Démontrer qu'une équation de la droite (D) de régression de Y en fonction de X par la méthode des moindres carrés est : $y = \frac{19}{22}x - \frac{17}{44}$.

5. Sur la base de l'ajustement linéaire ainsi réalisé, calculer la note probable de mathématiques d'un candidat qui a obtenu 15 sur 20 en sciences physiques.

Problème

L'objet de ce problème est l'étude de la fonction f dérivable sur] 0 ; +∞ [et définie par :

$f(x) = 2x - 3 + \frac{\ln x}{x}$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 2 cm.

Partie A

Soit g la fonction dérivable sur] 0 ; +∞ [et définie par $g(x) = 2x^2 + 1 - \ln x$.

1. Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation. (On ne demande pas de calculer les limites).

2. Justifier que $\forall\, x \in$] 0 ; +∞ [, $g(x) > 0$.

Partie B

1. a) Calculer la limite de f en +∞.

b) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat.

2. a) Démontrer que la droite (D) d'équation y = $2x$ – 3 est asymptote à (C) en +∞.

b) Préciser la position de (C) par rapport à (D).

3. a) Démontrer que pour tout nombre réel strictement positif x, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

b) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

c) Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1 est : y = $3x$ – 4.

4. a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α.

b) Justifier que : 1,3 < α < 1,4.

Partie C

On pose : $\varphi(x) = f((x) - (3x - 4)$ et $h(x) = -x^2 + 1 - \ln x$.

1. a) Déterminer le sens de variation de h sur] 0 ; +∞ [.

b) Calculer h(1) puis justifier que :

$\forall\, x \in$] 0 ; 1 [, $h(x) > 0$;

$\forall\, x \in$] 1 ; +∞ [, $h(x) > 0$.

2. a) Démontrer que : $\forall\, x \in$] 0 ; +∞ [, $\varphi(x) = \frac{h(x)}{x^2}$.

b) Etudier les variations de puis en déduire de signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x.

c) Déterminer la position de (C) par rapport à la tangente (T).

Partie D

1. Tracer la courbe (C), la droite (D) et la tangente (T). On prendra α = 1,35.

2. Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe(C), la droite (D) et les droites d'équations x = 1 et x = e.

Sujet 2 : Session 2009

Exercice 1

L'entreprise Ivoirbois, spécialisée dans l'industrie du bois, envisage de faire des prévisions pour l'année 2007 du coût de production de feuilles de contre-plaqués en fonction du chiffre d'affaires. Elle dispose à cet effet des statistiques résumées dans le tableau ci-dessous :

Années	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Chiffre d'affaires X (en millions de francs)	350	380	500	450	580	650	700
Coût de production (en millions de francs)	40	45	50	55	60	65	70

1. Représenter graphiquement le nuage de points associé à la série double (X,Y) dans le plan rapporté à un repère orthogonal (O, I, J).
On prendra 1 cm pour 50 millions de francs en abscisse et 1 cm pour 5 millions de francs en ordonnées.

2. a) Calculer le chiffre d'affaires moyen $\overline{X}$.

b) Calculer le coût de production moyen $\overline{Y}$.

3. a) Vérifier qu'un arrondi à l'entier de la covariance Cov(X, Y) de la série statistique est égale à 1193.

b) Justifier l'existence d'un ajustement linéaire entre X et Y.

4. a) Déterminer une équation de la droite (D) d'ajustement de Y en fonction de X par la méthode des moindres carrés.

b) Construire (D) dans le repère (O, I, J).

5. Utiliser l'ajustement précédent pour prévoir le coût de production de l'entreprise ivoirbois de l'année 2007 si le chiffre d'affaires de l'année 2007 est de 800 millions de francs.

Exercice 2

Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + 1 \end{cases}$

1. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J), représenter sur l'axe des abscisses les termes u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (unité graphique 2 cm).

2. a) Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par $\frac{5}{2}$.

b) Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

3. Soit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \frac{5}{2}$.

a) Démontrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Problème

Partie A

On considère la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $g(x) = (1 - x)e^{1-x} - 1$.

1. a) Justifier que la limite de g en $+\infty$ est 1.

b) Déterminer la limite de g en $-\infty$.

2. a) Démontrer que pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $g'(x) = (x - 2)e^{1-x}$.

b) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

3. a) Démontrer que l'équation $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 0$ admet une solution unique α.

b) Justifier que : $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$

c) En déduire que :

$\forall\, x \in]-\infty ; \alpha[$, $g(x) > 0$.

$\forall\, x \in]\alpha ; +\infty[$, $g(x) < 0$.

Partie B

On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = xe^{1-x} - x + 2$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité : 2 cm.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. a) Démontrer que f est une primitive de g sur IR.

b) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

3. a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

b) Etudier la position relative de (D) et (C).

4. Démontrer que (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (OJ).

5. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

6. Démontrer que $f(\alpha) = 1 - \alpha + \dfrac{1}{1-\alpha}$.

7. Justifier que pour tout nombre réel x, $f(-x + 2) = e^{x-1}f(x)$.

8. On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions. On appelle β l'une de ces solutions. Démontrer que $-\beta + 2$ est l'autre solution.

9. Tracer (D), (T) et (C). (*On prendra $\alpha = 0{,}4$ et $\beta = 2{,}5$.*)

Partie C

Soit λ un nombre réel strictement positif et $A(\lambda)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par (C), la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \lambda$.

1. Calculer $A(\lambda)$ à l'aide d'une intégration par parties.

2. Déterminer la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

Sujet 3 : Session Normale 2010

Exercice 1

Partie A

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : (E) : $4z^3 - 6i\sqrt{3}\,z^2 - 3(3 + i\sqrt{3})z - 4 = 0$.

1. Déterminer les racines carrées de $6 + 6i\sqrt{3}$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4 = 0$.

3. a) Développer, réduire et ordonner $(2z + 1)[2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4] = 0$.

b) En déduire les solutions de (E).

4. Soit $z_0 = -\frac{1}{2}$; $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$; $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$.

Exprimer chacun des nombres complexes z_0, z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

Partie B

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ où l'unité est 1 cm, on considère les points M_0, M_1 et M_2 d'affixes respectives $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$, $1 + i\sqrt{3}$.

S est la similitude directe de centre O, d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et de rapport 2.

1. a) Déterminer l'écriture complexe de S.

b) Justifier que $S(M_0) = M_1$ et $S(M_1) = M_2$.

2. Soit M_n un point du plan d'affixe z_n. On pose pour tout nombre entier naturel n, $M_{n+1} = S(M_n)$.

Justifier que $z_{n+1} = (1 - i\sqrt{3})z_n$ où z_{n+1} est l'affixe de M_{n+1}.

3. On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_n = |z_n|$.

a) Démontrer que (U_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) Justifier que la distance $OM_{12} = 2048$.

Exercice 2

On teste un médicament sur un ensemble d'individus ayant un taux de glycémie anormalement élevé. Pour cela 60% des individus prennent le médicament, les autres recevant une substance neutre et l'on étudie à l'aide d'un test la baisse du taux de glycémie. Chez les individus ayant pris le médicament, on constate une baisse de taux avec une probabilité de 0,8 ; on ne constate aucune baisse de ce taux pour 90% des personnes ayant reçu la substance neutre.

1. Calculer la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie sachant qu'on a pris le médicament.

2. Démontrer que la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie est 0,52.

3. On soumet au test un individu pris au hasard.

Quelle est la probabilité qu'il ait pris le médicament sachant que l'on constate une baisse de son taux de glycémie ?

4. On contrôle 5 individus au hasard.
a) Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux personnes dont le taux de glycémie a baissé ?
b) Quelle est la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé ?
5. On contrôle n individus pris au hasard. (n est un entier non nul).
Déterminer n pour que la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé soit supérieur à 0,98.

Problème

Partie A

Soit la fonction g dérivable sur]0 ; +∞ [et définie par $g(x) = 1 + x\ln x$.

1. a) Justifier que $\forall x \in]0 ; +\infty [$, $g'(x) = 1 + \ln x$.
b) Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation.(on ne calculera pas les limites de g.
2. En déduire $\forall x \in]0 ; +\infty [$, $g(x) > 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur [0 ; +∞ [par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall x \in]0;+\infty[, f(x) = \frac{x}{1+x\ln x} \end{cases}.$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .
(Unité : 4 cm)

1. a) Etudier la continuité de f en 0.
b) Etudier la dérivabilité de f en 0.
c) Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point O est y = x.
d) Démontrer que :
(C) est au-dessus de (T) sur]0 ; 1[;
(C) est au-dessous de (T) sur]1 ; +∞ [.
2. Démontrer que la droite (OI) est une asymptote à (C) en + ∞.
3. a) On suppose que f est dérivable sur]0 ; +∞ [. Démontrer que $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = \frac{1-x}{(1+x\ln x)^1}$.
b) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation.
4. Construire la droite (T) et la courbe (C) dans le plan muni du repère (O, I, J).

Partie C

1. a) Justifier que : $\forall x \in]0 ; +\infty [$, $f(x) \leq 1$.
b) Démontrer que : $\forall x \in]0 ; +\infty [$, $1 - \frac{1}{1+x} \leq f(x)$.
2. Soit A l'aire en cm² de la partie du plan limitée par (C), (OI) et les droites d'équations x = 1 et x = e.
Démontrer que $16(e - 1) + 16\ln\left(\frac{2}{1+e}\right) \leq A \leq 16(e - 1)$.

Sujet 4 : Session Normale 2011

Exercice 1

On considère la suite numérique (v_n) définie sur IN* par :$v_n = \frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$.

1. a) Démontrer que la suite (v_n) est convergente et donner sa limite.

b) Démontrer que la suite (v_n) est croissante.

c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{3}{4} \leq v_n \leq 1$.

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = v_1 \times v_2 \times ... \times v_n$.

a) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$.

b) En déduire la limite de la suite (a_n).

3. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \ln(v_1) + \ln(v_2) + \cdots + \ln(v_n)$

a) Démontrer que la suite (b_n) est une suite à termes négatifs.

b) Calculer la limite de la suite (b_n).

Exercice 2

La société « Gnamienlait » de Gnamien produit des sachets de lait caillé.
Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque sachet de lait caillé produit, sa masse en gramme (g).
La loi de probabilité de X est définie par le tableau ci-dessous.

x_i (en g)	220	230	240	250	260	270	280
p_i	0,08	0,10	a	b	0,16	0,15	0,04

a et b sont deux nombres réels. $x_i$représente la masse du sachet de lait caillé ;
p_i la probabilité qu'un sachet de ce lait ait la masse x_i.

1.a) Calculer l'espérance mathématique E(X) de X en fonction de a et b.

b) Sachant que E(X) = 250 ; justifier que : a = 0,14 et b = 0,33.

Dans la suite de l'exercice on conservera les valeurs de a et de b trouvées à la question 1.b).

2. Gnamien prend au hasard un sachet de lait caillé de sa société.
Calculer la probabilité pour que la masse de ce sachet de lait caillé soit au moins de 250 g.

3. Tiéplé, la fille de Gnamien, prend au hasard et de façon indépendante 5 sachets de lait caillé.
Calculer la probabilité qu'elle ait choisi exactement 3 sachets de lait caillé de 220 g. On prendra l'arrondi d'ordre 3 du résultat.

4. Les sachets de lait caillé sont contrôlés par une machine. Cette machine est réglée pour éliminer en principe les sachets de lait de masse strictement inférieure à 250 g.

- Si un sachet de lait caillé a 240 g, la probabilité qu'il soit éliminé est de 0,7,
- Si un sachet de lait caillé a 230 g, la probabilité qu'il soit éliminé est de 0,8 ;
- Si un sachet de lait caillé a 220 g, il est systématiquement éliminé.
- Si un sachet de lait caillé a une masse supérieure ou égale à 250 g, il est systématiquement accepté

a) Justifier que la probabilité qu'un sachet de lait caillé de 240 g soit éliminé est de 0,098.
b) Calculer la probabilité pour qu'un sachet de lait caillé de cette société soit éliminé.

Problème

Partie A

Soit g la fonction numérique dérivable sur]0 ; +∞[et définie par g(x) = $-\frac{2x+1}{x^2}$ + ln$x$.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}$ g(x) .

b) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}$ g(x) .

2.a) Démontrer que : ∀ x∈]0 ; +∞[, g′(x) = $\frac{x^2+2x+2}{x^3}$.

b) En déduire le sens de variation de g.

c) Dresser le tableau de variation de g.

3.a) Démontrer que l'équation : x ∈]0; +∞[, g(x) = 0 admet une solution unique α.

b) Justifier que : 2,55 < α < 2,56.

c) Démontrer que :

∀ x ∈] 0 ; α [, g(x) < 0 ;

∀ x ∈] α ; +∞ [, g(x) > 0.

Partie B

On considère la fonction f dérivable sur]0 ; +∞[et définie par : $f(x) = \left(\frac{1}{x} - \ln x\right) e^{-x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J). Unités graphiques : OI = 2 cm et OJ = 10 cm.

1. a) Calculer la limite de f en +∞ puis donner une interprétation graphique du résultat.

b) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x)$ puis donner une interprétation graphique du résultat.

2. Démontrer que : $f(\alpha) = -\left(\frac{1+\alpha}{\alpha^2}\right) e^{-\alpha}$.

3. a) Démontrer que pour tout nombre réel strictement positif x , $f'(x) = e^{-x}g(x)$.

b) En utilisant la partie A, déterminer les variations de f .

c) Dresser le tableau de variation de f .

4. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1 est : y = $-\frac{3}{e}x + \frac{4}{e}$.

5. Construire (T) et (C) dans le plan muni du repère (O,I,J). On prendra α = 2,6.

Partie C

1. Soit h la fonction dérivable sur]0 ; +∞[et définie par : h(x) = $e^{-x}\ln x$.

Démontrer que h est une primitive de f sur]0 ; +∞[.

2. soit λ un nombre réel tel que λ > 3 .

a) Calculer, en cm^2 et en fonction de λ , l'aire A(λ) de la partie du plan comprise entre (C), (OI) et les droites d'équations x = 3 et x = λ

b) Calculer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}$ A(λ) .

.

Sujet 5 : Session 2012

Exercice 1

Madame Kouamé, statisticienne à la retraite, a crée une petite entreprise de fabrication de colliers traditionnels. Dans l'intention de faire des prévisions pour la production de colliers de l'année 2011 elle a fait l'état des ventes des huit types de colliers fabriqués en 2010. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Type de collier	1	2	3	4	5	6	7	8
Prix = x_i de vente en centaines de francs CFA du collier de type i	54	60	66	72	84	90	96	102
Nombre y_i de dizaines de colliers vendus au prix x_i	18	16	15	13	10	9	8	7

On désigne par :

X le caractère « prix de vente du collier » ;

Y le caractère « nombre de colliers vendus au prix X ».

1. Représenter graphiquement le nuage de points associé à la série statistique double de caractère (X, Y) dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J). On prendra 2 cm pour 10 centaines de francs sur (OI) et 2 cm pour 2 dizaines de colliers sur (OJ).

2. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage.

3.a) Calculer la variance V(X) de X.

b) Calculer la covariance COV(X, Y) de la série statistique double de caractère (X, Y)

c) On admet que V(Y) = 14,50. Démontrer que l'arrondi d'ordre 2 du coefficient de corrélation linéaire est égal à -0,99

4. Soit (D) la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrés.

a) justifier que l'arrondi d'ordre 2 du coefficient directeur de (D) est égal à -0,23.

b) Démontrer qu'une équation de la droite (D) est : $y = 0{,}23x + 29{,}94$.

5. Pour l'année 2011, Madame Kouamé souhaite fabriquer un nouveau type de collier qu'elle vendrait à 11 500 francs CFA l'unité. Combien de colliers de ce type pourrait-elle vendre selon l'ajustement linéaire réalisé ?

Exercice 2

On considère la suite numérique U définie sur IN^* par : $\begin{cases} U_1 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{4}{U_n}\right) \end{cases}$

1. On considère la fonction f définie sur] 0 ; $+\infty$ [par : $f(x) = .\frac{1}{2}\left(x + \frac{4}{x}\right)$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) ou les unités

respectives sur (OI) et sur (OJ) sont 4 cm et 2 cm. la courbe (C) et la droite (D) d'équation y = x sont tracés sur la feuille annexe à rendre avec la copie.

a) Représenter sur l'axe des abscisses (OI) les termes U_1, U_2 et U_3 de la suite U en utilisant la courbe (C) et la droite (D).

b) Quelle conjecture peut-on faire quant à la convergence de la suite U.

2. On admet que f est continue et strictement croissante sur [2 ; 3]

a) démontrer que $f([2\ ;\ 3]) \subset [2\ ;\ 3]$.

b) En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout entier n≥ 1, $2 \leq U_n \leq 3$.

3.a) Démontrer que la suite U est décroissante.

b) En déduire que la suite U est convergente.

4. On considère la suite V définie sur IN^* par : $V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 2}$

a) Démontrer que pour tout entier n≥ 1, $V_{n+1} = (V_n)^2$

b) Démontrer par récurrence que pour tout entier n≥ 1, $V_n = (V_1)^{2^{n-1}}$

c) Calculer V_1 puis exprimer V_n en fonction de n.

d) Exprimer U_n en fonction de n.

e) Démontrer que $\lim V = 0$. En déduire la limite de U.

Problème

Partie A

On considère la fonction g dérivable et définie sur] 0 ; +∞ [par : $g(x) = e^x + 2lnx$.

1.a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

b) Calculer $g'(x)$ pour tout x de] 0 ; +∞ [.

c) Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

2.a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur] 0 ; +∞ [.

b) Vérifier que : 0,4 < α < 0,5.

c) Démontrer que :

$\forall\ x \in]0; \propto [,\ g(x) < 0$ et $\forall\ x \in] \propto; +\infty[,\ g(x) > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur [0 ; +∞ [par : $\begin{cases} f(x) = e^x + 2x\ln x - 2x & si\ x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 4 cm.

1.a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b) Interpréter graphiquement les résultats.

2.a) Démontrer que f est continue en 0.

b) Démontrer que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$.

c) La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Justifier la réponse.

d) Interpréter graphiquement le résultat de la question 2.b)

3. On admet que f est dérivable sur] 0 ; +∞ [.

a) Démontrer que : $\forall\ x \in]0; +\infty[,\ f'(x) = g(x)$.

b) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

4. Tracer la courbe (C) sur l'intervalle [0 ; 2]. (*on prendra α = 0,45 et on admettra que la courbe (C) coupe la droite (OI) en deux points d'abscisses respectives 0,3 et 0,6.)*

5.a) On pose $K = \int_1^2 x\ln x\, dx$. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $K = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$.

b) Soit A l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par la courbe(C), la droite (OI) et les droites d'équations respectives x = 1 et x = 2.

Calculer A puis donner l'arrondi d'ordre 2 du résultat.

BACCALAURÉAT SESSION 2013

EXERCICE 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O ,I,J), on désigne par K, A et B les points d'affixes respectives $z_1 = 2, z_2 = 4 + 2i$ *et* $z_3 = 2 + 4i$. L'unité graphique est 2 cm.

1- a) Placer les points K, A et B.

b) Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$.

2- On note S la similitude directe de centre K qui transforme A en B.

a) Démontrer que l'écriture complexe de S est : $z' = (1 + i)z - 2i$.

b) Déterminer les affixes respectives de I' et J', images respectives des points I et J puis placer I' et J'.

3- Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de la similitude directe S.

4- Soit (C) le cercle de centre Ω(1 ;1) et de rayon 2.

a) Tracer (C).

b) Déterminer le centre et le rayon de (C'), image de (C) par S.

c) Construire (C').

5-a) Déterminer puis construire l'image par S de la droite (IJ).

On pourra caractériser l'image par S de la droite (IJ) par deux points.

b) On désigne par E le point d'intersection de (C) et la droite (IJ) d'abscisse négative.

Placer E et l'image E' de E par S. Justifier la position du point E'.

EXERCICE 2

On considère la suite numérique (u) définie par : $u_0 = \sqrt{2}$ et pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{2}u_n$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J). L'unité graphique est 2 cm.

1- Déterminer les valeurs exactes de u_1 et u_2.

2- Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ et de représentation graphique (D).

a) Tracer (D) et la droite (Δ) d'équation y = x.

b) Placer u_0 sur l'axe (OI).

c) A l'aide de (D) et (Δ), placer les termes u_1 , u_2 et u_3 sur l'axe (OI).

3. a) Démontrer par récurrence que pour tout n élément de IN, $u_n \leq 4$.

b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4- on considère la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n - 4$, pour tout entier naturel n.

Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

5- On pose, pour tout nombre entier naturel n :

$T_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$; $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

a) Déterminer une expression de T_n en fonction de n.

b) Justifier que : $S_n = 2(\sqrt{2} - 4)\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + 4(n+1)$.

c) Déterminer la limite de la suite (S_n).

PROBLEME

Le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 2 cm.

On considère la fonction f dérivable et définie sur $]-\infty; 1[$ par : $f(x) = x^2 - 1 + \ln(1-x)$.

On note (C) la courbe représentative de f.

1 − a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis donner une interprétation graphique du résultat.

c) Calculer la limite de f à gauche en 1 puis donner une interprétation graphique du résultat.

2-a) Pour tout nombre réel x de $]-\infty; 1[$, calculer $f'(x)$.

b) Démontrer que f est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$.

c) Dresser le tableau de variation de f .

3-a) Démontrer que l'équation : (E) : $x \in]-\infty; 1[$, $f(x) = 0$ admet une solution unique α.

b) Justifier que : -0,7 < α < -0,6.

4- a) Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est : y= -x-1.

b) On donne le tableau de valeurs suivant :

x	-2	-1,4	-1	-0,75	-0,5	-0,25	0,25	0,5	0,75
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$	4,1	2,2	0,7	0,1	-0,3	-0,7	-1,2	-1,4	-1,8

Tracer (T) et (C). On pourra faire la figure dans la partie du plan caractérisée par $\begin{cases} -3 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 6 \end{cases}$.

5- On désigne par A l'aire de la partie du plan délimitée par (C), la droite (OI) et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = 0$.

a) Calculer $\int_{\alpha}^{0} \ln(1-x)\,dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

b) Démontrer que la valeur de A en unités d'aires est : A $= \frac{\alpha^3}{3} - 2\alpha - (1-\alpha)\ln(1-\alpha)$

c) Déterminer en cm^2 l'arrondi d'ordre 2 de la valeur de A pour $= -0{,}65$. .

6- Soit f^{-1} la bijection réciproque de f et (C') la courbe représentative de f^{-1} dans le plan muni du repère (O, I, J).

a) Calculer f(-1).

b) Démontrer que le nombre dérivé de f^{-1} en ln2 existe puis le calculer.

c) Construire la courbe (C') et sa tangente (Δ) au point d'abscisse ln2 sur la figure de la question 4-b).

BACCALAURÉAT SESSION 2014

Exercice 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On note B et C les points du plan d'affixes respectives $3-2i$ et $5+i$. On désigne par s la similitude directe de centre O qui transforme C en B.

1.a) Démontrer que l'écriture complexe de s est : $z' = \frac{1}{2}(1-i)z$.

b) Déterminer les éléments caractéristiques de s.

c) Déterminer l'affixe du point D qui a pour image le point C par f.

2.a) Justifier que l'affixe z_1 du point B_1, image de B par s est : $\frac{1}{2}(1-5i)$.

b) Justifier que le triangle OBB_1 est rectangle et isocèle en B_1.

3. On définit les points suivants : $B_0 = B \; et \; \forall n \in \mathbb{N}, \; B_{n+1} = s(B_n)$. On note z_n l'affixe de B_n.

a) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (1-i)^n z_0$.

b) Calculer la distance OB_n en fonction de n.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} OB_n$

Exercice 2

Pour étudier l'évolution du nombre de bacheliers accédant aux études supérieures, le Ministère du plan d'un pays a diligenté une enquête depuis l'an 2003. Les résultats de cette enquête sont consignés dans le tableau suivant :

Années	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Rang X de l'année	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre Y de diplômés (en milliers)	25	27	30	33	34	35	38	41	43

1. Représenter le nuage de point associé à la série statistique double (X , Y) dans le plan muni d'un repère orthonormé. (Unité graphique : 1 cm). On prendra pour origine du graphique le point $\Omega\binom{0}{24}$.

2. Déterminer les coordonnées du point moyen G de la série statistique (X , Y).

3. Justifier que :

a) La variance de X est $\frac{20}{3}$;

b) La covariance de X et Y est $\frac{44}{3}$.

4.a) Sachant que la variance de Y est égale à $\frac{98}{3}$, déterminer la valeur du coefficient de corrélation linéaire.

b) Justifier que ce résultat permet d'envisager un ajustement linéaire.

5. Soit (D) la droite d'ajustement de Y en X obtenue par la méthode des moindres carrés.

a) Déterminer une équation de (D).

b) Tracer (D).

6. On suppose que l'évolution se poursuit de la même manière au cours des années suivantes. Donner une estimation du nombre d'étudiants qui accèderont aux études supérieures en 2020.

Problème

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O , I , J). L'unité graphique est le centimètre.

Partie A

Soit g la fonction dérivable et définie par : $g(x) = x + (ax + b)e^{-x}$ où a et b sont des nombres réels.
Dans le plan muni du repère (O, I, J), on désigne par : $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de g et (D) la droite d'équation $y = x$.

1. a) On donne $g(0) = 1$. Déterminer la valeur de b.
b) On admet que la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0 est parallèle à (D).
Déterminer a.
2. Soit h la fonction dérivable et définie sur IR par : $h(x) = e^x - x$.
a) Soit h' la fonction dérivée de h. Calculer $h'(x)$ pour tout x élément de IR.
b) Dresser le tableau de variation de h. *On ne calculera pas les limites de h en* $-\infty$ *et* $+\infty$
c) En déduire que $\forall x \in IR, h(x) > 0$.

Partie B

Soit f la fonction dérivable et définie sur IR par : $f(x) = x + (x + 1)e^{-x}$.

1.a) Calculer la limite de f en $-\infty$.
b) Justifier que : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.
c) Donner une interprétation graphique de ces résultats.
2.a) Calculer la limite de f en $+\infty$.
b) Démontrer que (D) est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.
c) Etudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et (D).
3.a) on désigne par f' la fonction dérivée de f. Démontrer que $\forall x \in IR, f'(x) = e^{-x}h(x)$.
b) Déterminer le sens de variation de f.
c) Dresser le tableau de variation de f.
4. Construire sur le même graphique (T) , (D) et $(\mathcal{C})$.
5.a) Démontrer que f est une bijection de IR dans IR.
b) On note f^{-1} la bijection réciproque de f. Calculer $(f^{-1})'(1)$.
c) Construire (Γ) , la courbe représentative de f^{-1} sur le même graphique que $(\mathcal{C})$.

Partie C

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_{-1}^{n}(t + 1)e^{-t}dt$.

1. A l'aide d'une intégration par parties , démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = (-2 - n)e^{-n} + e$
2. Calculer l'aire $\mathcal{A}_n$ en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (D) et les droites d'équation $x = -1$ et $x = n$
3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{A}_n$.

BACCALAURÉAT SESSION 2015

Exercice 1

Partie I

On considère la fonction p définie sur $\mathbb{C}$ par : $p(z) = z^3 - (3 + 2i)z^2 + (1 + 5i)z + 2 - 2i$.

1.a) Calculer $p(i)$.
b) Déterminer deux nombres complexes a et b tels que : $p(z) = (z-i)(z^2+az+b)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-(3+i)z+2+2i=0$
3. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $p(z)=0$.

Partie II

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u}, \vec{v})$ d'unité : 5 cm.
On pose $z_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$. On note A_n le point d'affixe z_n.

1.a) Calculer z_1 et z_2
b) Placer les points A_0 , A_1 et A_2 dans le plan complexe.
2. On considère la suite U définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = |z_{n+1} - z_n|$
a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_n|$.
b) Démontrer que U est une suite géométrique de de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $\sqrt{2}$.
c) Exprimer U_n en fonction de n.
3. On désigne par $A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$ la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$
On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, l_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$
a) Calculer l_n
b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} l_n$.

Exercice 2

Mariam, une jeune diplômée sans emploi, a reçu un fonds et décide d'ouvrir un restaurant. Après un mois d'activité, elle constate que :
● Pour un jour donné, la probabilité qu'il y ait une affluence de clients est 0,6.
● Lorsqu'il y a une affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est 0,7.
● Lorsqu'il n'y a pas d'affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est 0,4.
On désigne par A l'événement « Il y a une affluence de clients » et par B l'événement « Mariam réalise un bénéfice ».

1. On choisit un jour au hasard.
a) Calculer la probabilité de l'événement E suivant : « Il y a une affluence de clients et Mariam réalise un bénéfice »
b) Démontrer que la probabilité $p(B)$ de l'événement B est 0,58.
Mariam a réalisé un bénéfice.
Calculer la probabilité qu'il y ait une affluence de clients ce jour-là. *On donnera l'arrondi d'ordre 2 du résultat*.
2. Mariam veut faire des prévisions pour trois jours successifs donnés. On désigne par X la variable aléatoire qui désigne le nombre de jours où elle réalise un bénéfice sur les trois jours successifs.
a) Déterminer les valeurs prises par X.
b) Déterminer la loi de probabilité de X.
c) Calculer l'espérance mathématique E(X) de X.

3. Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose p_n la probabilité que Mariam réalise au moins une fois un bénéfice pendant n jours successifs sur une période de n jours.
a) Justifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $p_n = 1 - (0{,}42)^n$.
b) Déterminer la valeur minimale de n pour qu'on ait $p_n \geq 0{,}9999$.

PROBLEME

Partie A

Soit r la fonction définie sur IR par : $r(x) = xe^{-x}$.
On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = r$.
Soit g la fonction dérivable et définie sur IR par : $g(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$
1. Démontrer que g est une solution de l'équation (E).
2. Soit l'équation différentielle (F) : $y' + y = 0$.
a) Démontrer que qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de (F).
b) Résoudre l'équation différentielle (F).
c) En déduire la solution φ de (E) qui vérifie $\varphi(0) = -\frac{3}{2}$.

Partie B

On considère la fonction f dérivable et définie sur IR par : $f(x) = \frac{x^2-3}{2}e^{-x}$.
On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O , I , J), d'unité graphique : OI= 2 cm ; OJ = 4 cm.
1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
b) Démontrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OJ).
3.a) Soit f' la fonction dérivée de f. Démontrer que : $\forall x \in IR, f'(x) = \frac{3+2x-x^2}{2}e^{-x}$.
b) Etudier les variations de f.
c) Dresser le tableau de variations de f.
4. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0 est : $y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$.
5. Etudier les positions relatives de $(\mathcal{C})$ par rapport à l'axe des abscisses.
6. Représenter graphiquement (T) et $(\mathcal{C})$.

Partie C

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^1 xe^{-x}dx$
2.a) Vérifier que f est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie A.
b) En déduire que : $\forall x \in IR, f(x) = -f'(x) + xe^{-x}$
c) En utilisant la question précédente, calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (OI) et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = 1$.

BACCALAURÉAT SESSION 2016

EXERCICE 1

1. On considère la fonction h dérivable et définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $h(x) = 2x - x^2$.

a) Démontrer que h est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;1]$

b) En déduire que l'image de l'intervalle $[0\,;1]$ par h est l'intervalle $[0\,;1]$.

2. Soit u la suite définie par : $u_0 = \frac{3}{7}$ et $\forall n \in \text{IN}, u_{n+1} = h(u_n)$.

a) Démonter par récurrence que $\forall n \in \text{IN},\ 0 < u_n < 1$.

b) Démontrer que la suite u est croissante.

c) Justifier que la suite u est convergente.

3. On considère la suite v définie par : $\forall n \in IN,\ v_n = \ln(1 - u_n)$.

a) Démontrer que v est une suite géométrique de raison 2.

b) Exprime v_n en fonction de n.

c) Calculer la limite de la suite v.

d) En déduire la limite de la suite u

EXERCICE 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, (unité graphique : 2 cm)

On considère la transformation S du plan qui, à tout point M d'affixe z associe le point M′ d'affixe z' telle que : $z' = \left(1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z + 2i\frac{\sqrt{3}}{3}$.

1.a) Soit Ω le point d'affixe 2. Vérifier que $S(\Omega) = \Omega$.

b) Justifier que S est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

2. a) Démontrer que $\forall z \neq 2, \frac{z'-z}{2-z} = i\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) En déduire que le triangle MΩM′ est rectangle en M.

c) Donner un programme de construction de l'image M′ par S d'un point M donné.

3.a) Placer les points A et B d'affixes respectives $-1 + i$ et $5 - i$ dans le plan muni du repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Construire les images respectives A′et B′ de A et B par S.

b) On note $z_A, z_B, z_{A'}\ et\ z_{B'}$ les affixes respectives des points A , B , A′et B′.

Démontrer que : $z_{A'} - z_A = z_B - z_{B'}$.

c) En déduire la nature du quadrilatère AA′BB′.

PROBLEME

Partie A

Soit g la fonction dérivable et définie sur IR par : $g(x) = -1 + (2 - 2x)e^{-2x+3}$.

1. Calculer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.

2. a) Soit g' la fonction dérivée de g.

Justifier que : $\forall x \in \text{IR},\ g'(x) = (4x - 6)e^{-2x+3}$.

b) Etudier le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x.

c) Justifier que $g\left(\frac{3}{2}\right) = -2$.

d) Dresser le tableau de variation de g.

3. a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans IR une solution unique notée α.

b) Vérifier que $0{,}86 < \alpha < 0{,}87$.

c) Justifier que : $\forall x \in]-\infty\,;\,\alpha[, g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha\,;\,+\infty[, g(x) < 0$.

Partie B

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I , J), (unité graphique 2 cm).

On considère la fonction f dérivable et définie sur IR par : $f(x) = -x + \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-2x+3}$.

On note (C) la courbe représentative de f.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b) En déduire que (C) admet une branche parabolique de direction (OJ) en $-\infty$.

2.a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

c) Etudier la position de (C) par rapport à (D).

3. a) Soit f' la fonction dérivée de f.

Démontrer que : $\forall x \in$ IR , $f'(x) = g(x)$.

b) En déduire les variations de f.

c) Dresser le tableau de variation de f. *On ne calculera pas* $f(\alpha)$.

4. Construire (D) et (C) sur le même graphique.

On précisera les points de (C) d'abscisses $0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{3}{2}\,;\,4$. On prendra $\alpha = 0{,}865$ et $f(\alpha) = 0{,}4$.

5. Soit t un nombre réel strictement supérieur à $\frac{3}{2}$. On désigne par $A(t)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = \frac{3}{2}$ et $x = t$.

On pose : $I_t = \int_{\frac{3}{2}}^{t} \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-2x+3}dx$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, justifier que : $I_t = \frac{3}{4} - \frac{t}{2}e^{-2t+3}$.

b) En déduire $A(t)$.

c) Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} A(t)$.

CORRIGE DES SESSIONS 2011 , 2012, 2013, 2016

CORRIGE DU BAC D SESSION 2011

EXERCICE 1

1.a) Soit f la fonction définie sur]0 ;+∞[par *:* $f(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$ .On a : $\forall n \in IN^*$, $v_n = f(n)$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{1}\right) = 1$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = 1$. La suite (v_n) converge vers 1.

b) f est dérivable sur]0 ;+∞[. $\forall x \in]0 ;+\infty[: f'(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^2-2(x+1)(x^2+2x)}{(x+1)^4} = \frac{2}{(x+1)^3}$.

$\forall x \in]0 ;+\infty[$ $2 > 0$ *et* $(x+1)^3$ *donc* $\forall x \in]0 ;+\infty[: f'(x) > 0$.

Donc *f* est strictement croissante sur]0 ;+∞[. Comme $v_n = f(n)$ donc la suite v_n est croissante.

c) La suite (v_n) est croissante, $v_1 = \frac{3}{4}$ *et* $lim(v_n) = 1$ donc *:* $\forall n \in IN^*$, $\frac{3}{4} \leq v_n < 1$.

2.a) a) Démontrer par récurrence que *:* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$.

Soit P(n) « $a_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$ *».*

Vérifions que *P(1)* est vraie.

Pour $n = 1$,$a_1 = v_1 = \frac{3}{4}$ *et* $\frac{1+2}{2(1+1)} = \frac{3}{4}$ donc *P(1)* est vraie.

Soit k un entier naturel non nul quelconque, supposons que *P(k)* est vraie c'est-à-dire $a_k = \frac{k+2}{2(k+1)}$ *et* démontrons que *P(k+1)* est vraie c'est-à-dire $a_{k+1} = \frac{k+3}{2(k+2)}$

Ecrivons a_{k+1} en fonction de a_k *:* $a_k = v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_k$

$a_{k+1} = a_n = v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_k \times v_{k+1} = a_k \times v_{k+1}$.

Or $a_k = \frac{k+2}{2(k+1)}$ *et* $v_{k+1} = \frac{(k+1)^2+2(k+1)}{(k+2)^2} = \frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2}$.

Donc : $a_{k+1} = \frac{k+2}{2(k+1)} \times \frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2} = \frac{(k+2)(k+3)}{2(k+2)^2} = \frac{k+3}{2(k+2)}$. Ainsi, *P(k+1)* est vraie.

On conclut que *:* $\forall n \in IN^*$, $a_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$.

b) Soit g la fonction définie sur]0 ;+∞[par *:* $g(x) = \frac{x+2}{2(x+1)}$.*On a :* $\forall n \in IN^*$, $a_n = g(n)$.

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{2(x+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

3.a)

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = ln(v_1) + ln(v_2) + \cdots + ln(v_n)$. *Or* $\forall n \in IN^*$, $\frac{3}{4} \leq v_n < 1$.

Par suite, $\forall n \in IN^*$, $ln(v_n) < 0$.

D'où la suite (b_n) est une suite à termes négatifs.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = ln(a_n)$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{2}$, $lim(b_n) = -ln(2)$.

EXERCICE 2

1.a)E(X) = 240a + 250b + 133,9.

b) On obtient le système :

$$\begin{cases} 240a + 250b + 133{,}9 = 250 \\ a + b + 0{,}53 = 1 \end{cases}$$

Après résolution, on obtient : a = 0,14 et b = 0,33 .

2.P(X ≥ 250) = 0,33 + 0,16 + 0,15 + 0,04 = 0,68 .

3. Il s'agit d'un schéma de Bernoulli de paramètres n = 5 et p = 0,08. D'où :
probabilité qu'elle ait choisi exactement 3 sachets de lait caillé de 220 g est
$P = C_5^3(0{,}08)^3(0{,}92)^2 \approx 0{,}004$.

4.a) La probabilité qu'un sachet de lait caillé de 240 g soit éliminé est : 0,14×0,7 = 0,098 .

b) La probabilité pour qu'un sachet de lait caillé de cette société soit éliminé est :
(0,008×1) + (0,1×0,8) + (0,14×0,7) = 0,258 .

PROBLEME

Partie A

1.a) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ *car* $\lim\limits_{x\to+\infty} lnx = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}[-\frac{2x+1}{x^2}] = \lim\limits_{x\to+\infty}[-\frac{2}{x}] = 0.$

b) On a : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ >}} lnx = -\infty$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ >}}[-\frac{2x+1}{x^2}] = -\infty$ *car* $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ >}}[-\frac{1}{x^2}] = -\infty$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ >}}[2x+1] = 1$

donc: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ >}} g(x) = -\infty$.

2.a) g est dérivable sur]0 ;+∞[et $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $g'(x) = \frac{-2x^2+2x(2x+1)}{x^4} + \frac{1}{x} = \frac{x^2+2x+2}{x^3}$.

b) $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $x^3 > 0$ *et* $x^2 + 2x + 2 > 0$ *donc* $\forall\, x \in]0\,;+\infty[, g'(x) > 0.$

D'où g est strictement croissante sur]0 ; +∞[.

c) Tableau de variation de g.

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	+	
$g(x)$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3.a) g est continue et strictement croissante sur$]0;+\infty[$.

$g(]0;+\infty[) = \text{IR}$ or $0 \in \text{IR}$ donc l'équation $x \in \text{IR}, g(x) = 0$ admet une solution unique α.

b) On a: 2,55 et 2,56 appartiennent à $]0;+\infty[$.

$g(2{,}55) \approx -0{,}002$ et $g(2{,}56) \approx 0{,}006$ et $g(2{,}55) \times g(2{,}56) < 0$ donc $\alpha \in]2{,}55;2{,}56[$ . .

c) g est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et $g(\alpha) = 0$ donc
$\forall x \in]0;\alpha[, g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha;+\infty[, g(x) > 0$.

Conclusion : $\forall x \in]0;\alpha[,\ g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha;+\infty[,\ g(x) > 0$.

Partie B

1.a) On a : $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}(-lnx) = +\infty$ *donc* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}(\frac{1}{x} - lnx) = +\infty$.

De plus, $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}(e^{-x}) = 1, donc: \lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x) = +\infty$.

b) On a : $\forall x\epsilon]0;+\infty[$, $f(x) = \frac{1}{xe^x} - \frac{lnx}{e^x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{xe^x}) = 0\ car\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty\ et\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty\ \ et \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{e^x} = 0, (croissance\ comparée)\ donc :$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0.$ D'où(OJ)est asymptote à (C)en $+\infty$.

2. $g(\alpha) = 0 \Rightarrow ln\alpha = \frac{2\alpha+1}{\alpha^2}$ *donc :* $f(\alpha) = (\frac{1}{\alpha} - \frac{2\alpha+1}{\alpha^2})e^{-\alpha} = -\frac{\alpha+1}{\alpha^2}e^{-\alpha}$.

3.a) $\forall x\epsilon]0;+\infty[$, $f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)e^{-x} - e^{-x}\left(\frac{1}{x} - lnx\right) = = e^{-x}(-\frac{2x+1}{x^2} + lnx)$.

$\forall x\epsilon]0;+\infty[$, $f'(x) = e^{-x}g(x)$.

$\forall x\epsilon]0;+\infty[$, $e^{-x} > 0$ donc le signe de *f'(x)* est celui de *g(x).*

D'où : $\forall x\epsilon]0;\alpha[$, $f'(x) < 0$ *et* $\forall x\epsilon]\alpha;+\infty[$, $f'(x) > 0$. On en déduit :

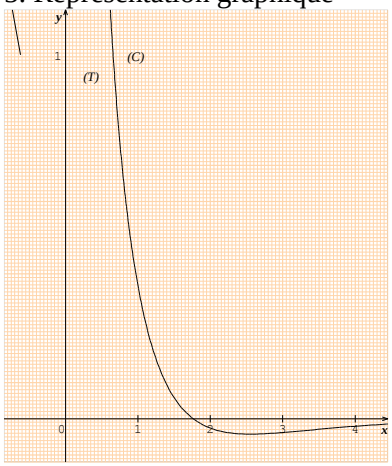
f est strictement décroissante sur $]0;\alpha[$ et *f* est strictement croissante sur $]\alpha;+\infty[$.

c) Tableau de variation

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗	0

4. Une équation de la tangente (T) à (C) au point d(abscisse 1 est : $y = -\frac{3}{e}x + \frac{4}{e}$.

5. Représentation graphique



Partie C

1. h est dérivable sur $]0;+\infty[$.$\forall x\epsilon]0;+\infty[$, $h'(x) = -e^{-x}lnx + e^{-x}\left(\frac{1}{x}\right) = e^{-x}(\frac{1}{x} - lnx)$

$\forall x\epsilon]0;+\infty[$, $h'(x) = f(x)$. Donc h est une primitive de *f* sur $]0;+\infty[$. *2. a) f est négative sur [3;λ],*

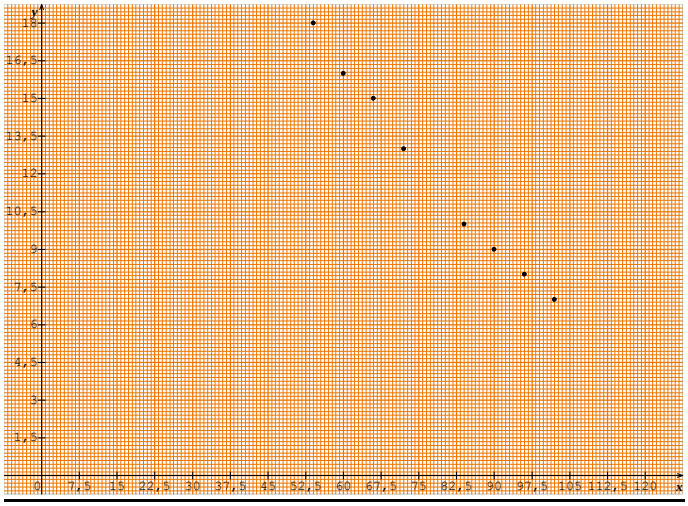
donc : $A(\lambda) = \int_0^{\lambda}[-f(x)]dx \times 20cm^2 = -[\,h(x)]_3^{\lambda} = 20(\frac{ln3}{e^3} - \frac{ln\lambda}{e^{\lambda}})\ cm^2$.

b) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \frac{ln\lambda}{e^{\lambda}} = 0, (croissance\ comparée)\ donc : \lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda) = 20(\frac{ln3}{e^3})cm^2.$

CORRIGE DU BAC D SESSION 2012

EXERCICE 1

1. Représentation graphique du nuage de points associé à la série double (X, Y).



2. Les coordonnées du point moyen G

X_i	Y_i	X_iY_i	$X^2{}_i$	$Y^2{}_i$
54	*18*	*972*	*2916*	*324*
60	*16*	*960*	*3600*	*256*
66	*15*	*990*	*4356*	*225*
72	*13*	*936*	*5184*	*169*
84	*10*	*840*	*7056*	*100*
90	*9*	*810*	*8100*	*81*
96	*8*	*768*	*9216*	*64*
102	*7*	*714*	*10404*	*49*
624	***96***	***6990***	***50832***	***1268***

$\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_1^8 X_i = \frac{624}{8} = 78$ *et* $\bar{Y} = \frac{1}{N}\sum_1^8 Y_i = \frac{96}{8} = 12$ *donc : G(78 ; 12).*

3.a) $V(X) = \frac{50832}{8} - (78)^2 = 270$.

b) COV(X ; Y)$= \frac{6990}{8} - 78 \times 12 = -62{,}25$.

c) Calculons le coefficient de corrélation linéaire

$$r = \frac{\text{Cov(X,Y)}}{\sqrt{\text{V(X)V(Y)}}} = \frac{-62{,}25}{\sqrt{270*14{,}50}} \approx -0{,}99$$

4.a) Le coefficient directeur de la droite (D) : $a = \frac{\text{Cov(X,Y)}}{\text{V(X)}} = \frac{-62{,}25}{270} \approx -0{,}23$

b) $b = \overline{Y} - a\overline{X}$

$b = 12 + 0{,}23 * 78 = 29{,}94$

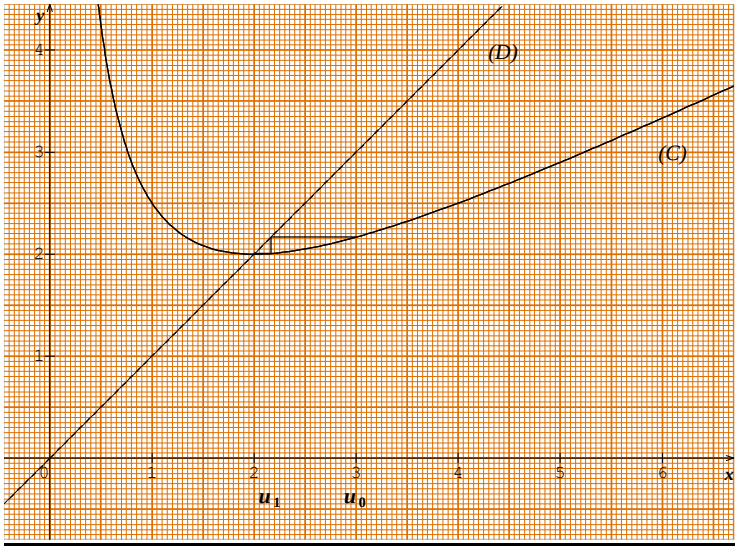
Une équation de la droite (D) : $y = ax + b = -0{,}23x + 29{,}94$

5. Pour $x = 115$ *on a* $y = -0{,}23 * 115 + 29{,}94 = 3{,}49$

Donc Mme KOUAME pourrait vendre 35 colliers .

EXERCICE 2

1.a)



b) Il semble que la suite U converge vers 2.

2.a) f est continue et strictement croissante sur $[2;3]$ *et* $f([2;3]) = \left[2;\frac{13}{6}\right]$. *Or* $\frac{13}{6} < 3$ *donc* $f([2;3]) \subset [2;3]$

b) Démontrons par récurrence que $\forall\, n \geq 1, \quad 2 \leq U_n \leq 3$

$*$ *Pour* $n = 1$ *on a* $U_1 = 3$ *or* $2 \leq 3 \leq 3$ *donc* $2 \leq U_1 \leq 3$

* Soit k un entier naturel quelconque supérieur à 1.

Supposons que $2 \leq U_k \leq 3$ et démontrons que $2 \leq U_{k+1} \leq 3$

On a *:* $2 \leq U_k \leq 3$ *donc* $f(U_k) \in [2;3]$ d' après la question précédente.

Comme $U_{k+1} = f(U_k)$, $2 \leq U_{k+1} \leq 3$.

On conclut que $\forall\, n \geq 1, \quad 2 \leq U_n \leq 3$

3.a) démontrons que la suite U est décroissante.

$$\forall\, n \in IN^*, on\ a : U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}U_n + \frac{2}{U_n} - U_n = \frac{-{U_n}^2 + 4}{2U_n} = \frac{(U_n + 2)(2 - U_n)}{2U_n}$$

On a : $\forall\, n\ \in IN^*,\ 2 \leq\ U_n \leq 3$ *d'où* $\frac{(U_n+2)}{2U_n} > 0$ *et* $2 -\ U_n \leq 0$.

Donc : $\forall\, n\ \in IN^*, U_{n+1} - U_n \leq 0$. Ainsi, la suite U est décroissante.

b) La suite U est décroissante et minorée par 2 donc la suite U est convergente.

4.a) Démontrons que pour tout entier $n\ \geq 1,\ V_{n+1} = (V_n)^2$.

$\forall\, n\ \in IN^*, V_{n+1} = \dfrac{U_{n+1} - 2}{U_{n+1} + 2}$

En remplaçant U_{n+1} par son expression et en simplifiant par $2U_n$ on obtient :

$V_{n+1} = \frac{(U_n)^2-4U_n+4}{(U_n)^2+4U_n+4} = \frac{(U_n-2)^2}{(U_n+2)^2}$. Or $V_n = \frac{U_n-2}{U_n+2}$ *donc pour tout entier* $n\ \geq 1,\ V_{n+1} = (V_n)^2$

b) Soit P_n la proposition pour tout entier $n\ \geq 1,\ V_n = (V_1)^{2^{n-1}}$.

* Pour n = 1 on a $(V_1)^{2^{1-1}} = V_1$ donc P_1 est vraie.

* Supposons que pour un entier naturel quelconque $k\ \geq 1,\ P_k$ vraie c'est-à-dire $V_k = (V_1)^{2^{k-1}}$ *et* démontrons que P_{k+1} vraie c'est-à-dire $V_{k+1} = (V_1)^{2^k}$.

On a : $V_k = (V_1)^{2^{k-1}}$ *d'où* $(V_k)^2 = [(V_1)^{2^{k-1}}]^2 = (V_1)^{2^{k-1}*2} = (V_1)^{2^k}$ or d'après la question 4-a / $V_{k+1} = (V_k)^2$ *alors* $V_{k+1} = (V_1)^{2^k}$ *donc* P_{k+1} *vraie.*

On conclut que pour tout entier $n\ \geq 1,\ V_n = (V_1)^{2^{n-1}}$.

c) Calcul de $V_1 = \frac{U_1-2}{U_1+2} = \frac{1}{5}$.

Pour tout entier $n\ \geq 1,\ V_n = (\frac{1}{5})^{2^{n-1}}$.

d) $V_n = \frac{U_n-2}{U_n+2} \Leftrightarrow U_n = \frac{2V_n+2}{1-V_n}$.

Pour tout entier $n\ \geq 1, U_n = \frac{2(\frac{1}{5})^{2^{n-1}}+2}{1-(\frac{1}{5})^{2^{n-1}}}$.

e) On a: $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{n-1} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{N\to+\infty} = (\frac{1}{5})^N = 0$ *car-1* $< \frac{1}{5} < 1$ *donc* $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = 0$.

Comme $U_n = \frac{2V_n+2}{1-V_n}$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2V_n+2}{1-V_n} = 2.$

PROBLEME

Partie A

1.a)$*\lim\limits_{x\to0} g(x) = -\infty$ *car* $\lim\limits_{x\to0} e^x = 1$ *et* $\lim\limits_{x\to0} 2lnx = -\infty$.

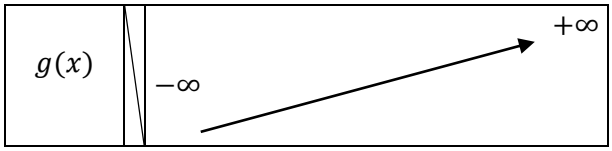
$*\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ *car* $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to0} 2lnx = +\infty$.

b) $\forall x\epsilon]0;+\infty[,\ g'(x) = e^x + \frac{2}{x}$.

c) $\forall x\epsilon]0;+\infty[,\ g'(x) > 0$ *car* $\forall x\epsilon]0;+\infty[,\ e^x > 0$ *et* $\frac{2}{x} > 0$.

D'où g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	‖	+



2.a) g est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et $g(]0;+\infty[) = IR$. Or $0 \in IR$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0;+\infty[$.

b) $g(0,4) = e^{0,4} + 2ln0,4 \approx -0,34$ *et* $g(0,5) = e^{0,5} + 2ln0,5 \approx 0,26$.

On a: $g(0,4) \times g(0,5) < 0$ donc $0,4 < \alpha < 0,5$.

c) g est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et $g(\alpha) = 0$ donc $g(]0;\alpha[) =]-\infty;0[$ et $g(]\alpha;+\infty[) =]0;+\infty[$. Donc : $\forall x \in]0;\alpha[, g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha;+\infty[, g(x) > 0$.

Partie B

1.a)$* \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (e^x + 2xlnx - 2x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x} + 2lnx - 2\right)$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} lnx = +\infty$ *donc* $\lim\limits_{x\to+\infty} 2lnx - 2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

On en déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} + 2lnx - 2 = +\infty$.

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. En multipliant ces deux limites, il vient : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$* \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x+2xlnx-2x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{x} + 2lnx - 2\right) = +\infty$.

b) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$,

(C) admet une branche parabolique de direction (OJ) en $+\infty$.

2.a) $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0} e^x + 2xlnx - 2x = 1$ *car* $\lim\limits_{x\to0} e^x = 1$ *et* $\lim\limits_{x\to0} 2xlnx = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to0} 2x = 0$. *On a :* $\lim\limits_{x\to0} f(x) = f(0)$ *donc f est continue en* 0 .

b) $\lim\limits_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} + 2lnx - 2 = -\infty$ *car* $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ *et* $\lim\limits_{x\to0} 2lnx - 2 = -\infty$.

c) f n'est pas dérivable en 0 *car* $\lim\limits_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ *n'est pas finie.*

d) (C) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.

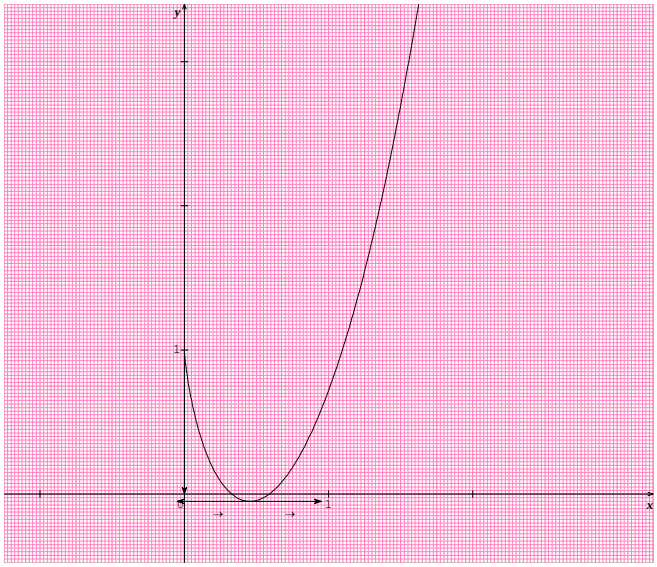
3.a) f *est dérivable sur* $]0;+\infty[$ *et* $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = e^x + 2lnx - 2x\left(\frac{1}{x}\right) - 2 = g(x)$.

b) On en déduit : $\forall x \in]0;\alpha[, f'(x) < 0$ *et* $\forall x \in]\alpha;+\infty[, f'(x) > 0$.

Donc f est strictement décroissante sur $]0;\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha;+\infty[$.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4. Figure.



5.a) $K = \int_1^2 xlnx\, dx$

Posons $\begin{cases} u(x) = lnx \\ v'(x) = x \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$

Toutes ces fonctions sont continues sur [1 ;2], on peut donc faire une intégration par parties :

$K = \left[\frac{1}{2}x^2 lnx\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x\, dx = \left[\frac{1}{2}x^2 lnx - \frac{1}{4}x^2\right]_1^2 = \left(\frac{4ln2}{2} - \frac{4}{4}\right) - \left(\frac{ln1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 2ln2 - \frac{3}{4}$

b) $\mathcal{A} = \left(\int_1^2 (e^x + 2xlnx - 2x)\, dx\right) \times 16cm^2 = \left(\int_1^2 e^x\, dx + 2\int_1^2 xlnxdx - 2\int_1^2 xdx\right) \times 16cm^2$

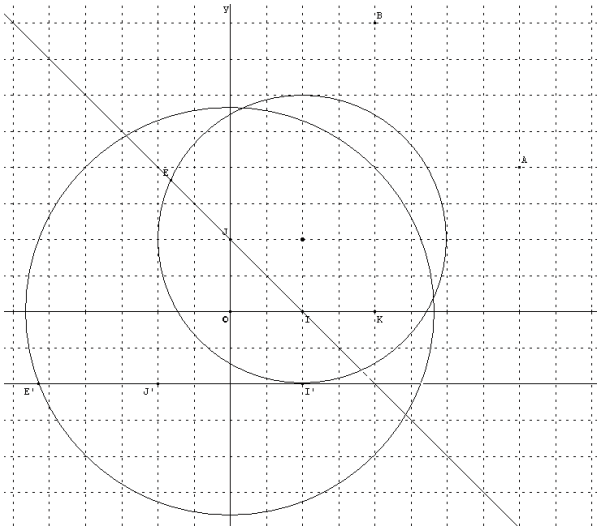
$\mathcal{A} = [e^x]_1^2 + 2\left(2ln2 - \frac{3}{4}\right) - 2\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2) \times 16cm^2 = 16\left(e^2 - e + 4ln2 - \frac{9}{2}\right)cm^2$

$\mathcal{A} \approx 47{,}09cm^2$.

CORRIGE DU BAC D SESSION 2013

EXERCICE 1

1- a) Voir figure.



b) On a : $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} = 1+i$.

2- On note S la similitude directe de centre K qui transforme A en B.

a) L'écriture complexe de S est de la forme : $z' = az + b$, avec a ∈ $\mathbb{C}^*$ et b ∈ $\mathbb{C}$.

$\begin{cases} S(K) = K \\ S(A) = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} az_K + b = z_K \\ az_A + b = z_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(2) + b = 2 \\ a(4+2i) + b = 2 + 4i \end{cases}$

On trouve : a = 1+ i et b = -2i.

Donc l'écriture complexe de S est : $z' = (1+i)z - 2i$.

b) On a : $z_{I'} = (1+i)z_I - 2i$ = 1- i.

On a : $z_{J'} = (1+i)z_J - 2i$ = -1-i.

3- Soit k le rapport de S et θ son angle.

On a : k = |1+i| = $\sqrt{2}$.

On a : $\begin{cases} cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

4- Soit (C) le cercle de centre Ω(1 ;1) et de rayon 2.

a) Voir figure.

b) Notons Ω' le centre de (C') et r' son rayon : Ω' est l'image de Ω par S.

On a : $z_{\Omega'} = (1+i)z_\Omega - 2i$ = (1+i)(1+i) -2i= 0.

Donc $\Omega' = 0$.

r'= kr = $\sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$.

Ainsi (C') est le cercle de centre O et de rayon $2\sqrt{2}$.

c) Construction de (C'). Voir figure.

5-a) L'image par S de la droite (IJ) est la droite (I'J').

b) E est le point d'intersection de (C) et la droite (IJ) d'abscisse négative. On a : E ∈ [IJ)

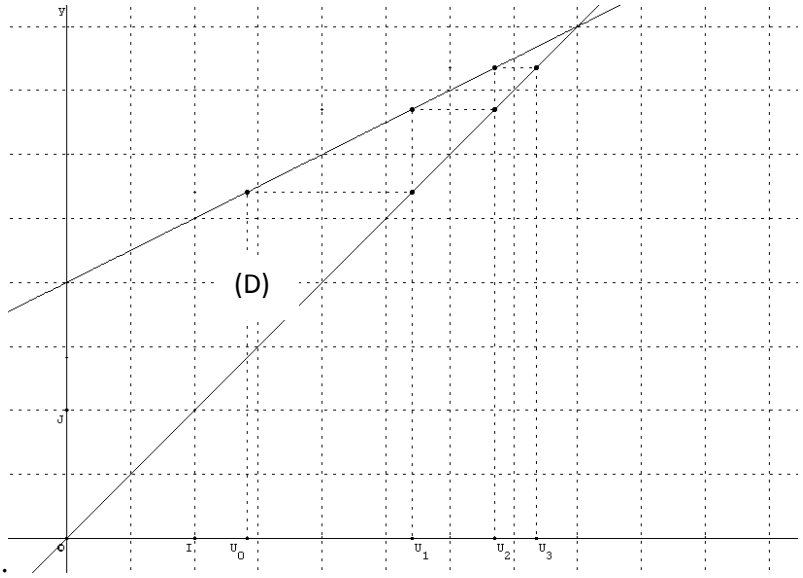
Donc E' est le point d'intersection de (C') et de la droite [I'J').

Voir figure.

EXERCICE 2

1- $u_1 = 2 + \frac{1}{2}u_0 = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$; $u_2 = 2 + \frac{1}{2}u_1 = 3 + \frac{\sqrt{2}}{4}$.

2- a) Voir figure.



.

b) Voir figure.

c) Voir figure.

3. a) Démontrer par (Δ) ence que pour tout n élément de IN, $u_n \leq 4$.

- Initialisation

On a $u_0 = \sqrt{2}$ et $\sqrt{2} \leq 4$ donc $u_0 \leq 4$.

- Hérédité

Supposons que pour un entier naturel k, on ait $u_k \leq 4$

On a : $u_{k+1} = 2 + \frac{1}{2}u_k$

$u_k \leq 4 \Longrightarrow \frac{1}{2}u_k \leq 2 \Longrightarrow 2 + \frac{1}{2}u_k \leq 4$

Donc : $u_{k+1} \leq 4$. .

-Conclusion

D'après l'axiome de récurrence, on a pour tout n élément de IN, $u_n \leq 4$.

b) Pour tout entier naturel n, on a :

$u_{n+1} - u_n = 2 + \frac{1}{2}u_n - u_n = \frac{1}{2}(4 - u_n)$.

Or $u_n \leq 4$ donc : $4 - u_n \geq 0$.

Par suite, $\frac{1}{2}(4 - u_n) \geq 0$.

Conclusion : pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n \geq 0$. D'où la suite (u_n) est croissante.

c) On vient de prouver que la suite (u_n) est croissante et majorée par 4 donc (u_n) est convergente.

4- Pour tout n élément de IN, $v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = 2 + \frac{1}{2}u_n - 4 = \frac{1}{2}u_n - 2 = \frac{1}{2}(u_n - 4)$

Ainsi, $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$. On peut en conclure que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \sqrt{2} - 4$.

5- a) $T_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

T_n est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme v_0, donc :

Pour tout nombre entier naturel n : $T_n = \frac{v_0[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}]}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(\sqrt{2}-4\right)[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}]$

b) $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (v_0 + 4) + (v_1 + 4) + \cdots + (v_n + 4)$.

$S_n = (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) + 4(n+1) = T_n + 4(n+1) = 2\left(\sqrt{2}-4\right)\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] + 4(n+1)$

c) On a : $\frac{1}{2} \in]-1;1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$, $d'o\grave{u}\ \lim\limits_{n\to+\infty} 2\left(\sqrt{2}-4\right)\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = 2\left(\sqrt{2}-4\right)$,

$de\ plus$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 4(n+1) = +\infty$, donc par somme des limites: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

PROBLEME

1 − a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

• $On\ a$: $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-1) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$.

• $On\ a$: $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-x) = +\infty\ et\ \lim\limits_{x\to+\infty} lnx = +\infty$

Donc par composition des limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1-x) = +\infty$

Donc par somme des limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

b)Pour tout $x < 0$, $\frac{f(x)}{x} = x - \frac{1}{x} + \frac{\ln(1-x)}{x}$

• $On\ a$: $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty\ et\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-\frac{1}{x}) = 0\ donc\ par\ somme\ des\ limites,\ \lim\limits_{x\to-\infty}(x-\frac{1}{x}) = -\infty$

• $Posons\ X = 1-x,$

$quand\ x \longrightarrow -\infty, X \longrightarrow +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\ln(1-x)}{x} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{1-X} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X}.\frac{X}{1-X}$.

$\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0\ et\ \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1-X}{X} = \lim\limits_{X\to+\infty}(\frac{-X}{X}) = \lim\limits_{X\to+\infty}(-1) = -1$

Donc par produit des limites, $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X}.\frac{X}{1-X} = 0, ainsi\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\ln(1-x)}{x} = 0.$

$Donc\ par\ somme\ des\ limites,\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty.$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty\ et\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ donc (C)admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (OJ).

c) • $On\ a$: $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}(x^2-1) = 0$

• $Posons\ X = 1-x,\ quand\ x \longrightarrow 1, X \longrightarrow 0$

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} \ln(1-x) = \lim\limits_{\substack{X\to0\\>}} lnX = -\infty$

Donc par produit des limites, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x) = -\infty$, donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à (C).

2-a) Pour tout nombre réel x de $]-\infty;1[, f'(x) = \frac{-2x^2+2x-1}{1-x}$

b) Pour tout nombre réel x de $]-\infty;1[, 1-x>0$ donc $f'(x)$ a le signe de $-2x^2+2x-1$.

Le discriminant de $-2x^2+2x-1$ est $\Delta = -4$. Comme $\Delta < 0$ donc $-2x^2+2x-1$ a le signe de (-2) : donc $\forall\, x<1, -2x^2+2x-1<0$.

Ainsi, pour tout nombre réel x de $]-\infty;1[, f'(x)<0$. D'où f est strictement décroissante sur $]-\infty;1[$.

c) Le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		1
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$

3-a) f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty;1[$; $f(]-\infty;1[\,) =]-\infty;+\infty]$ or $0 \in]-\infty;+\infty]$ donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]-\infty;1[$.

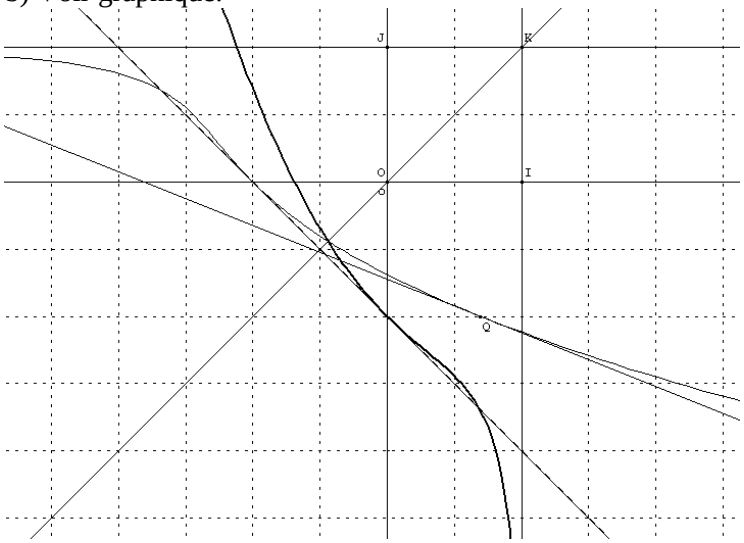
D'où l'équation : $x \in]0;+\infty[$, $f(x)=0$ admet une unique solution α.

b) -0,7 et -0,6 appartiennent à $]-\infty;1[$.

f(-0,7) ≈ 0,02 et f(-0,6) ≈ -0,17. f(-0,7)× f(-0,6) < 0 ⟹ -0,7 < α < -0,6.

4- a) On a : f'(0) = -1 et f(0) = -1 d'où une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est : $y = f'(0)(x-0)+ f(0) = -x-1$.

b) Voir graphique.



5- On désigne par A l'aire de la partie du plan délimitée par (C), la droite (OI) et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = 0$.

a) Posons : $\begin{cases} u(x) = \ln(1-x) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a'(t) = \frac{1}{x-1} \\ \varphi(t) = x-1 \ par\ exemple \end{cases}$

Une intégration par parties donne $\int_\alpha^0 \ln(1-x)\,dx = [(x-1)\ln(1-x)]_\alpha^0 - \int_\alpha^0 1\,dx$.

Donc : $\int_\alpha^0 \ln(1-x)\,dx = [(x-1)\ln(1-x)-x]_\alpha^0 = \alpha + (1-\alpha)\ln(1-\alpha)$

b) Sur $[\alpha;0]$, (C) est au dessous de (OI) donc :

A = $-\int_{\alpha}^{0} f(x)dx = \int_{\alpha}^{0}(1-x^2)dx - \int_{\alpha}^{0}\ln(1-x)\,dx$ en unités d'aires.

A = $\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{\alpha}^{0} - \alpha - (1-\alpha)\ln(1-\alpha) = \frac{\alpha^3}{3} - 2\alpha - (1-\alpha)\ln(1-\alpha)$

c) A = $4[\frac{\alpha^3}{3} - 2\alpha - (1-\alpha)\ln(1-\alpha)]$ cm^2

Donc l'arrondi d'ordre 2 de la valeur de A pour $\alpha = -0{,}65$ est 1,53 cm^2.

6- a) Calculer f(-1) = ln2.

b) f'(-1) = $-\frac{5}{2}$ donc f'(-1) $\neq 0$. On en déduit que f^{-1} est dérivable en ln2 .

On a : $(f^{-1})'(ln2) = \frac{1}{-\frac{5}{2}} = -\frac{2}{5}$

c) Voir figure.

CORRIGE DU BAC D SESSION 2016

EXERCICE 1

1.a) Pour tout $x \in [0\,;1]$, $h'(x) = 2(1-x)$.

● $\forall x \in [0\,;1]$, $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

● Pour tout $\in [0\,;1[$, on a $x < 1$, donc $1 - x > 0$ par suite $h'(x) > 0$.

Ainsi la fonction h est strictement croissante sur $[0\,;1]$

b) La fonction h est continue et strictement croissante sur $[0\,;1]$ donc $h([0\,;1]) = [h(0); h(1)]$ soit $h([0\,;1]) = [0\,;1]$.

2. a) Soit la proposition $0 < u_n < 1$.

● Elle est vraie au rang 0 car $u_0 = \frac{3}{7}$ et $0 < \frac{3}{7} < 1$.

● Soit k un entier naturel donné, supposons que la proposition est vraie au rang k ; On a donc

$0 < u_k < 1$. Démontrons que la proposition est vraie au rang $k+1$:

Comme $0 < u_k < 1$ et que h est strictement croissante sur $[0\,;1]$ alors $h(0) < h(u_k) < h(1)$ soit $0 < u_{k+1} < 1$, ce qui prouve que la proposition est vraie au rang $k+1$.

Des deux étapes précédentes nous tirons la conclusion : $\forall n \in$ IN , $0 < u_n < 1$

b) Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= h(u_n) - u_n \\ &= 2u_n - (u_n)^2 - u_n \\ &= u_n - (u_n)^2 \\ &= u_n(1-u_n) \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour tout entier naturel n, on a $0 < u_n < 1$ donc $1 - u_n > 0$ par suite $u_n(1-u_n) > 0$.

Ainsi, $\forall n \in$ IN, $u_{n+1} - u_n > 0$ soit $u_{n+1} > u_n$. La suite u est donc croissante.

c) D'après 2.b) et 2.a) la suite u est croissante et majorée donc elle est convergente.

3.a) Pour tout nombre entier naturel n, on :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln(1-u_{n+1}) \\ &= \ln(1-2u_n+(u_n)^2) \\ &= \ln(1-u_n)^2 \\ &= 2\ln(1-u_n) \\ &= 2v_n \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \in \text{IN}, v_{n+1} = 2v_n$ donc la suite v est une suite géométrique de raison 2.

b) $\forall n \in IN,\ v_n = v_0 \times 2^n$ soit $v_n = \ln\left(\frac{4}{7}\right) \times 2^n$

c) On a $\ln\left(\frac{4}{7}\right) < 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ donc $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty}$.

d) Comme $v_n = \ln(1-u_n)$ alors $1-u_n = e^{v_n}$ donc $u_n = 1-e^{v_n}$

On a $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty}$ **et** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc par composée, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{v_n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-e^{v_n} = 1$

Ainsi $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$

EXERCICE 2

1.a) Pour $z = z_\Omega = 2$ on a : $z' = \left(1-i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\times 2 + 2i\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\begin{aligned} &= 2 - 2i\frac{\sqrt{3}}{3} + 2i\frac{\sqrt{3}}{3} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Ainsi Pour $z = z_\Omega$ on a Pour $z' = z_\Omega$, d'où $S(\Omega) = \Omega$.

b)

● L'écriture complexe de S est de la forme $z' = az + b$ avec $a = 1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}$ (nombre complexe non nul) et $b = 2i\frac{\sqrt{3}}{3}$ donc S est une similitude directe.

● Les éléments caractéristique de S :

- Comme $a \neq 1$, alors le point Ω d'affixe 2 est l'unique point invariant par S. Ω est donc le centre de S.

- Le rapport : $k = |a| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.
- L'Angle de S : Notons θ la mesure principale de l'angle de S, on a $\theta = Arg(a)$.

$$cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } sin\theta = -\frac{1}{2} \text{ donc } \quad \boldsymbol{\theta = -\frac{\pi}{6}}$$

Ainsi, *S* est la similitude directe de centre Ω, de rapport $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ et d'angle $-\frac{\pi}{6}$.

2.a) Pour tout nombre complexe $z \neq 0$ on a :

$$\frac{z'-z}{2-z} = \frac{\left(1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z + 2i\frac{\sqrt{3}}{3} - z}{2-z}$$

$$= \frac{\left(1 - i\frac{\sqrt{3}}{3} - 1\right)z + 2i\frac{\sqrt{3}}{3}}{2-z}$$

$$= \frac{\left(-i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z + 2i\frac{\sqrt{3}}{3}}{2-z}$$

$$= \frac{i\frac{\sqrt{3}}{3}(-z+2)}{2-z}$$

$$= i\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ainsi, $\forall \boldsymbol{z \neq 2}$, $\quad \boldsymbol{\frac{z'-z}{2-z} = i\frac{\sqrt{3}}{3}}$

b) Notons $z_M, z_\Omega \; et \; z_{M'}$ les affixes respectives des points M , Ω et M'. D'après 2.a) le quotient $\frac{z_{M'} - z_M}{z_\Omega - z_M}$ est un nombre imaginaire pur non nul donc le triangle MΩM' est un triangle rectangle en M.

c) Programme de construction du point ' , image de M par *S*

Le centre Ω de la similitude directe *S* est fixe et M est point donné tel que M ≠ Ω :

● On construit la perpendiculaire (Δ_M) à (ΩM) en M car (ΩM) ⊥ (MM')

● On construit la demi – droite [ΩT) telle que $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega T}}\right) = -\frac{\pi}{6}$ car $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}\right) = -\frac{\pi}{6}$

Le point M' est alors le point d'intersection de (Δ_M) et [ΩT)

3.a) Voir figure ci – après.

b) De l'égalité $\boldsymbol{\frac{z'-z}{2-z} = i\frac{\sqrt{3}}{3}}$ il vient :

● $\boldsymbol{\frac{z_{A'} - z_A}{2 - z_A} = i\frac{\sqrt{3}}{3}}$, soit $z_{A'} - z_A = \boldsymbol{i\frac{\sqrt{3}}{3}}(2 - z_A)$ d'où $\boldsymbol{z_{A'} - z_A = i\frac{\sqrt{3}}{3}(3 - i)}$

- $\frac{z_{B'}-z_B}{2-z_B}=\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{3}$, soit $z_{B'}-z_B=\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{3}(2-z_B)$ d'où $z_{B'}-z_B=\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{3}(-3+i)$ par suite on a

$\boldsymbol{z_B-z_{B'}=i\frac{\sqrt{3}}{3}(3-i)}$

On a $z_{A'}-z_A=i\frac{\sqrt{3}}{3}(3-i)$ et $z_B-z_{B'}=i\frac{\sqrt{3}}{3}(3-i)$ donc $\boldsymbol{z_{A'}-z_A=z_B-z_{B'}}$

NB : On pouvait aussi calculer $z_{A'}$ et $z_{B'}$ à partir de l'écriture complexe et prouver ensuite que $z_{A'}-z_A=z_B-z_{B'}$

c) Comme $z_{A'}-z_A=z_B-z_{B'}$ c'est que $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{B'B}$ d'où le quadrilatère $AA'BB'$ est un parallélogramme.

PROBLEME

Partie A

1.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}[-1+(2-2x)e^{-2x+3}]$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty}(2-2x)=+\infty$;

Par ailleurs $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x+3)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ donc par composée $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-2x+3}=+\infty$.

Ainsi, par produit on a $\lim\limits_{x\to-\infty}[(2-2x)e^{-2x+3}]=+\infty$, par suite on a

$\lim\limits_{x\to-\infty}[-1+(2-2x)e^{-2x+3}]=+\infty$ soit $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[-1+(2-2x)e^{-2x+3}]$

Posons $X=-2x+3$ alors $x=\frac{-X+3}{2}$; Quand x tend vers $+\infty$ alors X tend vers $-\infty$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}[-1+(2-2x)e^{-2x+3}]=\lim\limits_{X\to-\infty}[-1+(X-1)e^X]$

$=\lim\limits_{X\to-\infty}(-1+Xe^X-e^X)$

$=-1$ puisque $\lim\limits_{X\to-\infty}Xe^X=0$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}e^X=0$

Ainsi, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-1}$

2.a) La fonction $g: x\longmapsto -1+(2-2x)e^{-2x+3}$ est par hypothèse dérivable sur IR.

Pour tout $x\in$ IR , on a : $g'(x)=-2e^{-2x+3}+(2-2x)(-2e^{-2x+3})$

$=(-2-4+4x)e^{-2x+3}$

$=(4x-6)e^{-2x+3}$

Ainsi, pour tout $x \in$ IR, $\boldsymbol{g'(x) = (4x - 6)e^{-2x+3}}$

b) Pour tout ∈ IR , $\boldsymbol{e^{-2x+3} > 0}$ donc le signe de $g'(x)$ est celui de $4x - 6$; Il s'en suit :

- $g'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$
- $\forall x \in \left]-\infty ; \frac{3}{2}\right[, g'(x) < 0$ et $\forall x \in \left]\frac{3}{2} ; +\infty\right[, g'(x) > 0$

c) $g\left(\frac{3}{2}\right) = -1 + \left(2 - 2 \times \frac{3}{2}\right) e^{-2\times\frac{3}{2}+3} = -1 + (-1)e^0 = -2$

d) Tableau de variation de g

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	-1

3.a)

- La fonction g est continue et strictement décroissante sur $\left]-\infty ; \frac{3}{2}\right[$, $g\left(\left]-\infty ; \frac{3}{2}\right[\right) =]-2 ; +\infty[$ et $0 \in]-2 ; +\infty[$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\left]-\infty ; \frac{3}{2}\right[$ une solution unique α.
- La fonction g est continue et strictement croissante sur $\left[\frac{3}{2} ; +\infty\right[$, $g\left(\left[\frac{3}{2} ; +\infty\right[\right) = [-2 ; -1[$ et 0 n'appartient pas à l'intervalle $[-2 ; -1[$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $\left[\frac{3}{2} ; +\infty\right[$

Finalement l'équation $g(x) = 0$ admet dans IR une solution unique α.

b) $g(0{,}86) \approx 0{,}007$ et $g(0{,}87) \approx -0{,}083$. Ainsi, $g(0{,}86) \times g(0{,}87) < 0$ par suite $0{,}86 < \alpha < 0{,}87$

c) Signe de $\boldsymbol{g(x)}$

- Sur l'intervalle $\left]-\infty ; \frac{3}{2}\right[$, g est strictement décroissante, par ailleurs $\alpha \in \left]-\infty ; \frac{3}{2}\right[$; On a donc :

Pour tout $x \in]-\infty; \alpha[$, comme $x < \alpha$ alors $g(x) > g(\alpha)$ soit $f(x) > 0$.

Pour tout ∈ $\left]\alpha; \frac{3}{2}\right[$, comme $x > \alpha$ alors $g(x) < g(\alpha)$ soit $f(x) < 0$.

● A la question 3.a) on a prouvé que $g\left(\left[\frac{3}{2}\ ;\ +\infty\right[\right) = [-2\ ;\ -1[$, par suite,

pour tout $x \in \left[\frac{3}{2}\ ;\ +\infty\right[$, $g(x) < 0$

Finalement : $\forall \boldsymbol{x} \in]-\infty\ ;\ \boldsymbol{\alpha}[\ ,\ \boldsymbol{g(x) > 0}$ **et** $\forall \boldsymbol{x} \in]\boldsymbol{\alpha}\ ;\ +\infty[\ ,\ \boldsymbol{g(x) < 0}$

Partie B

1.a)

● $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x + \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-2x+3}\right]$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x + \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-2x+3}\right]$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} x\left[-1 + \left(1 - \frac{1}{2x}\right)e^{-2x+3}\right]$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 - \frac{1}{2x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x+3} = +\infty$ (déjà justifié au A.1) , donc par produit on a

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 - \frac{1}{2x}\right)e^{-2x+3} = +\infty$ et par suite $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-1 + \left(1 - \frac{1}{2x}\right)e^{-2x+3}\right] = +\infty$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-1 + \left(1 - \frac{1}{2x}\right)e^{-2x+3}\right] = +\infty$ alors par produit on a

$\lim\limits_{x\to-\infty} x\left[-1 + \left(1 - \frac{1}{2x}\right)e^{-2x+3}\right] = -\infty$ soit $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

● $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[-1 + \left(1 - \frac{1}{2x}\right)e^{-2x+3}\right] = +\infty$ **(voir rédaction précédente)**

b) Comme $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$ **et** $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty}$ alors la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe (OJ) en $-\infty$.

2.a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x + \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-2x+3}\right]$

Posons $X = -2x + 3$ alors $x = \frac{-X+3}{2}$. Quand x tend vers $+\infty$, X tend vers $-\infty$. On donc :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{X\to-\infty}\left[\frac{X-3}{2} + \left(\frac{-X+3}{2} - \frac{1}{2}\right)e^{X}\right]$$
$$= \lim_{X\to-\infty}\left[\frac{1}{2}X - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}Xe^{X} + e^{X}\right]$$

On a $\lim\limits_{X\to-\infty} \frac{1}{2}X = -\infty$, $\lim\limits_{X\to-\infty} \frac{1}{2}Xe^{X} = 0$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$ par suite

$\lim\limits_{X\to-\infty}\left[\frac{1}{2}X - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}Xe^{X} + e^{X}\right] = -\infty$ d'où $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{-2x+3}$

Il ressort du changement de variable effectué au B.2.a) que :
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{-2x+3}=\lim\limits_{X\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}Xe^{X}+e^{X}\right)=0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+x]=0$ et la droite (D) d'équation $y=-x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

c) Pour tout $x\in$ IR on a $f(x)+x=\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{-2x+3}$

Comme pour tout $x\in$ IR on a $e^{-2x+3}>0$, alors le signe de $f(x)+x$ est celui de $x-\frac{1}{2}$.

Par suite on a :

- $\forall x\in\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right[\,, f(x)+x<0$ et $\forall x\in\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[\,, f(x)+x>0$
- $f(x)+x=0$ pour $x=\frac{1}{2}$

D'où :

- (C) est au-dessous de (D) sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right[$ et (C) est au – dessus de (D) sur $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$
- (C) et (D) se coupent au point d'abscisse $\frac{1}{2}$

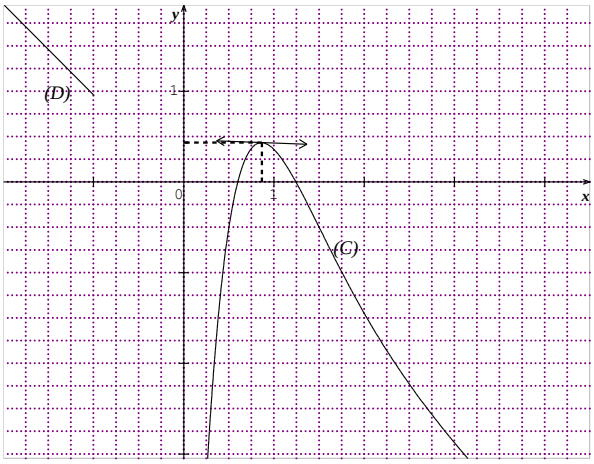
c) Tableau de variation de f

D'après B.3.a) pour tout nombre réel x , $f'(x)=g(x)$, et d'après A.3.c) on a :

$\forall x\in]-\infty\,;\alpha[\,, f'(x)>0$ **et** $\forall x\in]\alpha\,;+\infty[\,, f'(x)<0$ d'où le tableau de variation :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$-\infty$

4. Construction de (D) et (C)



5. a) Calcul de $I_t = \int_{\frac{3}{2}}^{t} \left(x - \frac{1}{2}\right) e^{-2x+3} dx$ par intégration par parties.

Posons $\begin{cases} u(x) = x - \frac{1}{2} \\ v(x) = e^{-2x+3} \end{cases}$, on a : $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x+3} \end{cases}$ de préférence.

Il vient : $I_t = \left[-\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) e^{-2x+3}\right]_{\frac{3}{2}}^{t} - \int_{\frac{3}{2}}^{t} -\frac{1}{2} e^{-2x+3} dx$

$$= -\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\right) e^{-2t+3} + \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{4} e^{-2x+3}\right]_{\frac{3}{2}}^{t}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\right) e^{-2t+3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{-2t+3} + \frac{1}{4}$$

$$= -\frac{t}{2} e^{-2t+3} + \frac{3}{4}.$$

Ainsi, $\boldsymbol{I_t = \frac{3}{4} - \frac{t}{2} e^{-2t+3}}$ **.**

b) Calcul de $A(t)$:

Sur $\left[\frac{3}{2} ; t\right]$ (C) est au – dessus de (D).

On a donc : $A(t) = \left[\int_{\frac{3}{2}}^{t} [f(x) + x] dx\right] \times 4\ cm^2$

$$= \left[\int_{\frac{3}{2}}^{t} \left(x - \frac{1}{2}\right) e^{-2x+3} dx\right] \times 4\ cm^2$$

$$= \left(\frac{3}{4} - \frac{t}{2} e^{-2t+3}\right) \times 4cm^2$$

Soit $\boldsymbol{A(t) = 3 - 2te^{-2t+3}}$ **cm² .**

c) $\lim\limits_{t\to+\infty} A(t) = \lim\limits_{t\to+\infty}(3-2te^{-2t+3})$

Posons $x=-2t+3$, alors $t=\frac{1}{2}(-x+3)$; Quand t tend vers $+\infty$, x tend vers $-\infty$. On a donc :

$\lim\limits_{t\to+\infty} A(t) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(3-2\times\frac{1}{2}(-x+3)e^{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}(3+xe^{x}-3e^{x})$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty}(3+xe^{x}-3e^{x})=3$

Ainsi $\boldsymbol{\lim\limits_{t\to+\infty} A(t)=3}$